

m

Miscellanea

INGV

Le Sorgenti sismiche: teoria ed osservazione

02



Direttore

Enzo Boschi

Editorial Board

Raffaele Azzaro (CT)

Sara Barsotti (PI)

Mario Castellano (NA)

Viviana Castelli (BO)

Anna Grazia Chiodetti (AC)

Rosa Anna Corsaro (CT)

Luigi Cucci (RM1)

Mauro Di Vito (NA)

Marcello Liotta (PA)

Lucia Margheriti (CNT)

Simona Masina (BO)

Nicola Pagliuca (RM1)

Salvatore Stramondo (CNT)

Andrea Tertulliani - coordinatore (RM1)

Aldo Winkler (RM2)

Gaetano Zonno (MI)

Segreteria di Redazione

Francesca Di Stefano (coordinatore)

Tel. +39 06 51860068

Fax +39 06 36915617

Rossella Celi

Tel. +39 06 51860055

Fax +39 06 36915617

redazionecen@ingv.it

m

Miscellanea

INGV

LE SORGENTI SISMICHE: TEORIA ED OSSERVAZIONE

Valerio Materni¹ e Rodolfo Console²

¹Università degli Studi Roma Tre (Dipartimento di Fisica "E. Amaldi")

²INGV (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia)

$$= - \iiint [\partial \delta(\eta - \xi) / \partial \eta_q] G_{np}(\xi, \tau) c_{ijpq} n_j \partial \delta(\eta - \xi) / \partial \eta_q dV$$

02

Indice

Introduzione	5
1 Elastodinamica	6
1.1 Elementi di elastodinamica	6
1.2 Appendice 1: Potenziali di Helmholtz	10
1.3 Appendice 2: Teorema di Lamè	11
2 Rappresentazione di sorgenti sismiche	11
2.1 Teoremi di unicità e di reciprocità	11
2.2 Teorema della rappresentazione	13
2.3 Equivalenza fra forze e dislocazioni	15
2.4 Tensore del momento	17
2.5 Appendice 3: Applicazione del teorema di Gauss all'equazione del moto per un mezzo elastico continuo	20
3 Radiazione di una sorgente sismica	21
3.1 Campo di spostamenti per una forza singola impulsiva	21
3.2 Campo degli spostamenti per il tensore dei momenti	23
3.3 Funzioni di irraggiamento	24
3.4 Radiazione di una sorgente puntiforme	25
4 Meccanismi focali di frattura	26
4.1 Meccanismo di sorgente con frattura	26
4.2 Funzione di irraggiamento di una frattura di taglio orientata secondo gli assi	28
4.3 Funzione di irraggiamento di una frattura di taglio orientata arbitrariamente	29
4.4 La sfera focale e le sue proiezioni	31
4.5 Determinazione del meccanismo focale	35
4.6 Rappresentazione di diversi tipo di faglie	37
4.7 Implicazioni tettoniche del rilascio di momento sismico	38
Bibliografia	41

Introduzione

Scopo di questo lavoro è quello di fornire al lettore (più o meno esperto) uno strumento per la comprensione (concettuale ed analitica) di alcuni aspetti della teoria dinamica dell'elasticità, passando poi alla rappresentazione delle sorgenti sismiche, alla loro radiazione ed alla determinazione del loro meccanismo. Il terremoto infatti, non è altro che l'effetto delle onde sismiche, cioè il processo di oscillazione della Terra e, in particolare, della superficie terrestre, dove tale oscillazione è osservabile. La sorgente del terremoto (o sorgente sismica) è la sorgente delle onde sismiche.

Nel capitolo 1 si fa riferimento in particolare al più semplice problema dinamico per un mezzo isotropo; la sorgente sismica infatti è forza impulsiva applicata ad un solo punto e orientata come uno degli assi del sistema di riferimento. E' stata descritta la relazione che rappresenta la radiazione emessa da tali sorgenti in un mezzo elastico illimitato, omogeneo ed isotropo fino ad arrivare alla soluzione rappresentata dal Tensore di Green.

Successivamente, (capitolo 2), viene fornita una descrizione sulla rappresentazione delle sorgenti sismiche sia in modo analitico che concettuale. Anche in questo caso è fatta una trattazione completa del problema, per poi giungere alla definizione di tensore momento sismico.

Il terzo capitolo riguarda invece la trattazione sulla radiazione della sorgente sismica, sul campo degli spostamenti e sulle funzioni di irraggiamento, partendo dai risultati del primo e del secondo capitolo.

Infine nella quarta ed ultima parte si è descritto il meccanismo focale di frattura, funzioni di irraggiamento per una frattura (orientata secondo gli assi o arbitrariamente) descrivendo la sfera focale e le sue proiezioni ed alcuni metodi per la determinazione del meccanismo focale.

1 Elastodinamica

1.1 Elementi di elastodinamica

Si consideri in un mezzo elastico illimitato, omogeneo ed isotropo, una forza di intensità $F(t)$ variabile nel tempo applicata nell'origine delle coordinate in direzione \hat{x}_1 .

La corrispondente forza di volume è

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = F(t)\delta(\mathbf{x})\hat{x}_1$$

Esprimendo la forza \mathbf{f} tramite i potenziali di Helmholtz Φ e Ψ (vedi appendice 1), si può scrivere

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

se $\Phi = \nabla \cdot \mathbf{B}$ e $\Psi = -\nabla \times \mathbf{B}$ (con \mathbf{B} campo vettoriale).

Vale la pena di osservare che il fatto che \mathbf{f} sia diretta come \hat{x}_1 comporta che anche \mathbf{B} sia diretto come \hat{x}_1 , ma in generale non è vero che \mathbf{B} sia parallelo a \mathbf{f} .

La soluzione della (1.1) è:

$$\mathbf{B} = -\frac{F(t)}{4\pi r} \hat{x}_1 \quad \text{con } r = |\mathbf{x}|.$$

Ne segue che i potenziali possono essere scritti come:

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \\ \Psi(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{x}_3 \right) \end{cases}$$

A questo punto, introducendo il teorema di Lamè (vedi appendice 2), i due potenziali φ e ψ ubbidiscono separatamente alle equazioni:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{\alpha^2} \ddot{\varphi} = \frac{F(t)}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \\ \nabla^2 \psi - \frac{1}{\beta^2} \ddot{\psi} = \frac{F(t)}{4\pi\rho\beta^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{x}_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{x}_3 \right) \end{cases}$$

integrando [Boschi - Dragoni, 2000],

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{r} \right)^{r/\alpha} \int_0^{r/\alpha} \tau F(t-\tau) d\tau \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{x}}_3 \right)^{r/\beta} \int_0^{r/\beta} \tau F(t-\tau) d\tau \end{cases}$$

Sostituendo poi all'interno della decomposizione dello spostamento

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$$

ed esprimendo il tutto per una generica forza con direzione j , si ottiene:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right)^{r/\alpha} \int_0^{r/\alpha} \tau F_j(t-\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} F_j \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) F_j \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Utilizzando il segno di convoluzione¹, si possono scrivere le soluzioni dinamiche in maniera analoga a quelle statiche, con la differenza che il prodotto è sostituito dalla convoluzione. Così lo spostamento dovuto a una forza $F_j(t)$ variabile nel tempo è:

$$u_i = F_j * G_{ij} \quad (1.3)$$

e confrontando con la (1.2) si può scrivere il tensore di Green

$$\begin{aligned} G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{0}, 0) &= \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \left[H \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) - H \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{\alpha} \right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{\beta} \right) \end{aligned}$$

dove con γ_i si indicano i coseni direttori² del raggio vettore dal punto in cui si applica la forza al punto \mathbf{x} .

¹ Nel caso unidimensionale, si dice convoluzione della $f(t)$ con la $g(t)$ la funzione $u(t) = \int f(t-\tau) g(\tau) d\tau$ e si indica con $f(t)*g(t)$. Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà commutativa $f*g=g*f$, della proprietà associativa $f*(g*h)=(f*g)*h$ e della proprietà distributiva $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

² $\gamma_i = x_i/r = \partial r / \partial x_i$, pertanto $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = \left(\frac{3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}}{r^3} \right)$

Nel tensore di Green si individuano tre termini, dipendenti rispettivamente uno da $1/r^3$ e due da $1/r$. I termini che dipendono da $1/r$ saranno predominanti a grandi distanze; essi pertanto vengono chiamati soluzioni di *campo lontano* (*far field*). Il termine che dipende da $1/r^3$ ha un ruolo di rilievo a brevi distanze; per questa ragione viene denominata soluzione di *campo vicino* (*near field*). In realtà la dipendenza da r va vista come $1/r^2$, in quanto si ha la presenza del termine t , proporzionale ad r .

Come si vede dalla presenza delle velocità α e β ($\alpha \approx \beta\sqrt{3}$), i due termini di campo lontano si riferiscono rispettivamente alle onde longitudinali ed a quelle trasversali. Nel *campo vicino*, invece, i due tipi di onde non sono separabili.

La forma temporale dell'impulso di campo vicino in un dato punto dello spazio è quella di un trapezio che inizia all'istante di tempo r/α e termina all'istante r/β , con ampiezza crescente in maniera proporzionale al tempo.

Per quanto riguarda il campo vicino, gli integrali sui tempi sono stati esplicitati introducendo la funzione di Heaviside o funzione a gradino H definita nel modo seguente:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

che nel caso trattato fornisce

$$t \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \frac{r}{\alpha} \\ t & \text{se } \frac{r}{\alpha} < t < \frac{r}{\beta} \\ 0 & \text{se } t > \frac{r}{\beta} \end{cases}$$

Le caratteristiche principali, per quanto riguarda il campo lontano sono le seguenti:

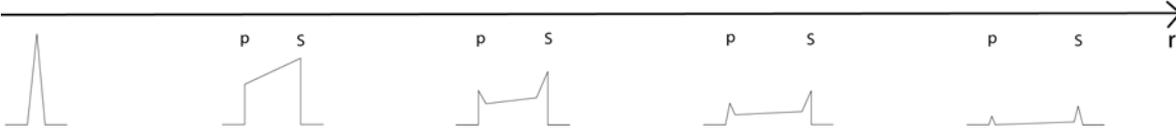
Onde P

- dipende dalla distanza come $1/r$
- le onde si propagano con velocità $\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$
- la forma dell'onda è proporzionale alla forza applicata ed inversamente proporzionale ad α^2
- la direzione della dislocazione è parallela alla direzione sorgente-ricevitore

Onde S

- dipende dalla distanza come $1/r$
- le onde si propagano con velocità $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$
- la forma dell'onda è proporzionale alla forza applicata ed inversamente proporzionale ad β^2
- la direzione della dislocazione è perpendicolare alla direzione sorgente-ricevitore

Di seguito è rappresentato (per distanze crescenti) l'andamento temporale della risposta:



Come conclusione si è quindi trovata una forma di una soluzione, chiamata dell'elastodinamica, nominata tensore di Green, come risposta ad una forza (in questo caso impulsiva) e concentrata in un punto in un mezzo elastico omogeneo isotropo e illimitato.

La (1.2) può quindi essere così riscritta:

$$u_i^j = \frac{F}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} t \left[H\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - H\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \right] + \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{F}{4\pi\rho\beta^2} (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right)$$

La soluzione è divisa in 9 componenti, le 3 possibili componenti della forza e le 3 possibili componenti della risposta.

N.B. Le ampiezze dipendono dall'angolo con cui l'energia lascia la sorgente

Da questo momento in poi si considererà solo il caso di campo lontano. In tal caso si ha:

$$\begin{cases} u_1^1 = \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{x_1^2}{r^3} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{F}{4\pi\rho\beta^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right) \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ u_2^1 = \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{x_1x_2}{r^3} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{F}{4\pi\rho\beta^2} \left(\frac{x_1x_2}{r^3}\right) \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\ u_3^1 = \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{x_1x_3}{r^3} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{F}{4\pi\rho\beta^2} \left(\frac{x_1x_3}{r^3}\right) \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{cases}$$

Considerando il caso di una forza applicata in direzione x_1 ed esprimendo gli spostamenti in coordinate polari (r, θ, φ) , (utilizzando le trasformazioni di coordinate Jacobiane, [Lay and Wallace, 1995]) e ponendosi nel piano x_1x_3 ($\varphi=0$) si ha:

$$\begin{cases} u_r^1 = \text{sen}\theta u_1^1 + \cos\theta u_3^1 = \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\text{sen}\theta}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) \\ u_\varphi^1 = \cos\theta u_1^1 + \text{sen}\theta u_3^1 = \frac{F}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{\cos\theta}{r} \delta\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \end{cases}$$

Osservazione: Un caso speciale dell'elastodinamica è quello dell'elastostatica. La risposta statica ha senso a t infinito dell'integrale del tempo della funzione di Green, solo se si mantiene la sollecitazione, quindi se la forza è nel tempo un gradino. In questo caso c'è un residuo statico (rimane una deformazione).

1.2 Appendice 1

Potenziali di Helmholtz

È sempre possibile rappresentare un campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ come somma di un campo irrotazionale \mathbf{A}_1 (quindi $\nabla \times \mathbf{A}_1 = 0$), ed un solenoidale \mathbf{A}_2 (quindi $\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0$):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \quad (1.4)$$

Ricordando che il rotore di un gradiente è identicamente nullo, segue che $\mathbf{A}_1 = \nabla\Phi$ con Φ campo scalare, e analogamente, ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, segue che $\mathbf{A}_2 = \nabla \times \mathbf{\Psi}$ con $\mathbf{\Psi}$ campo vettoriale. La (1.4) può quindi essere riscritta come

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} \quad (1.5)$$

I campi Φ e $\mathbf{\Psi}$ sono detti potenziali di Helmholtz. Per calcolarli è sufficiente risolvere l'equazione di Poisson vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mathbf{A}$$

dove \mathbf{B} è un altro campo vettoriale. Infatti, in base all'identità

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

l'equazione di Poisson è identicamente soddisfatta se si sceglie il campo vettoriale \mathbf{B} in modo che si possa scrivere

$$\Phi = \nabla \cdot \mathbf{B} \quad e \quad \mathbf{\Psi} = -\nabla \times \mathbf{B}$$

Risulta soddisfatta anche la condizione $\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = 0$. La soluzione dell'equazione di Poisson vettoriale, analogamente al caso scalare, è:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

dove V è il volume nel quale è definito il campo \mathbf{A} e $dV = dx'_1 dx'_2 dx'_3$. La soluzione dell'equazione in una parte irrotazionale e in una solenoidale è particolarmente utile per il campo degli spostamenti in un corpo elastico.

1.3 Appendice 2

Teorema di Lamè

Sia $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ un campo degli spostamenti che soddisfa l'equazione di Navier-Cauchy

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

e sia \mathbf{f} la forza di volume espressa tramite i suoi potenziali di Helmholtz

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$$

allora esistono un potenziale scalare $\varphi(\mathbf{x},t)$ e un potenziale vettore $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},t)$ tali che

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \\ \nabla \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \\ \ddot{\varphi} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\Phi}{\rho} \\ \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} \end{cases}$$

L'applicazione del teorema di Lamè nello studio dell'elastodinamica è necessaria per l'inserimento delle forze \mathbf{f} all'interno dell'equazione di Navier-Cauchy; introduce cioè il termine forzante.

2 Rappresentazione di sorgenti sismiche

2.1 Teoremi di unicità e di reciprocità

L'equazione del moto per un mezzo elastico continuo

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + f_i(\mathbf{x},t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) \quad (2.1)$$

ci mette in condizione di calcolare l'accelerazione di una particella (\ddot{u}_i) prodotta dall'applicazione di forze di volume (f_i) al suo interno e di forze di contatto con le particelle adiacenti ($\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t)$).

Si fa notare come le grandezze in gioco nella (2.1) abbiano dimensioni fisiche di forze divise per volumi. Pertanto l'equazione (2.1) si riferisce a forze infinitesime agenti su volumi infinitesimi di materia. Integrando tali forze su volumi finiti, si ottengono relazioni fra grandezze finite come si è abituati a considerare nella fisica elementare.

Si consideri il caso di un corpo di volume V e superficie esterna S . La (2.1) integrata su tale corpo fornisce:

$$\iiint_V \sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) dV + \iiint_V f_i(\mathbf{x},t) dV = \iiint_V \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) dV \quad (2.2)$$

Ricorrendo al *teorema della divergenza* (o di Gauss; vedi appendice 3) l'integrale di volume al primo membro della (2.2) si può trasformare in un integrale di superficie:

$$\iint_S \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j dS + \iiint_V f_i(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_V \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.3)$$

dove n_j sono le componenti della normale alla superficie S nel punto \mathbf{x} (fig. 1).

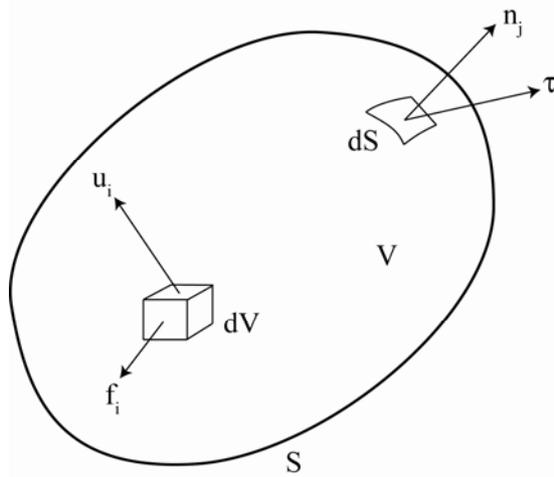


Figura 1 Corpo di volume V e superficie esterna S su cui si applica l'equazione del moto.

La (2.3) si può scrivere anche

$$\iiint_V \{ \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t) \} dV = \iint_S \tau_i(\mathbf{x}, t) dS \quad (2.4)$$

dove $\tau_i(\mathbf{x}, t)$ sono le componenti delle tensioni ($\tau_i = \sigma_{ij} n_j$) agenti sulla superficie S .

La (2.4) mette in relazione il moto delle particelle di un corpo elastico con la distribuzione delle forze di volume al suo interno e con la distribuzione delle tensioni sulla sua superficie.

Il *teorema di unicità* afferma che il campo di spostamenti $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ all'interno di un corpo di volume V e superficie esterna S è univocamente determinato al tempo $t \geq t_0$ dai valori iniziali degli spostamenti e le velocità delle particelle al tempo t_0 e dai valori in funzione del tempo t :

- di tutte le forze di volume $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$,
- di tutte le tensioni $\boldsymbol{\tau}$ su una parte S_1 di S .
- di tutti gli spostamenti sulla restante parte S_2 di S tale che $S_1 + S_2 = S$.

Le condizioni su S vengono denominate *condizioni al contorno* del problema.

Si consideri che nel mezzo V agisca, simultaneamente al sistema di forze f_i e al sistema di tensioni superficiali $\tau_i^{(u)}$, un altro sistema di forze g_i , a sua volta associato a un altro sistema di tensioni superficiali $\tau_i^{(v)}$. Ciascuno dei due gruppi di azioni dà luogo al rispettivo campo di spostamenti u_i e v_i , per i quali vale la relazione (2.4). Si effettuano ora le seguenti operazioni: prodotto tra le due equazioni ottenute

(applicando la (2.4) ai due diversi casi rispettivamente per v_i e u_i), somma su i e sottrazione della seconda dalla prima (rimanendo implicita la dipendenza di tutte le variabili dal punto \mathbf{x} e dal tempo t):

$$\iiint_V \rho(v_i \ddot{u}_i - u_i v_i) dV + \iiint_V (u_i g_i - v_i f_i) dV = \iint_S (v_i \tau_i^{(u)} - u_i \tau_i^{(v)}) dS \quad (2.5)$$

Integrando ora nel tempo la (2.5), e tenendo conto che l'integrale del primo termine è necessariamente nullo se le velocità iniziali e finali di tutte le particelle nel tempo sono nulle (come si dimostra applicando la regola di derivazione di un prodotto)³:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V (u_i g_i - v_i f_i) dV = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_S (v_i \tau_i^{(u)} - u_i \tau_i^{(v)}) dS. \quad (2.6)$$

La relazione (2.6) (così ottenuta è nota come *teorema della reciprocità* (o di Betti, 1872)). Essa può essere anche scritta esplicitando gli sforzi mediante la definizione $\tau_i = \sigma_{ij} n_j$ e utilizzando la relazione tra sforzi e deformazioni⁴:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V (u_i g_i - v_i f_i) dV = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_S (v_i c_{ijkl} u_{k,l} - u_i c_{ijkl} v_{k,l}) n_j dS, \quad (2.7)$$

dove c_{ijkl} ⁵ sono i parametri elastici del mezzo [Udias, 1999].

Osservazione: Il teorema della reciprocità rappresenta l'effetto totale nel volume e sulla superficie esterna del corpo, per un tempo totale (cioè da $-\infty$ a $+\infty$). A tale teorema può essere dato un ben preciso significato fisico.

Supponiamo che sia uguale a zero il termine a destra del segno di uguale (ad esempio tensioni ovunque nulle oppure spazio illimitato). I prodotti $u_i g_i$ e $v_i f_i$, integrati su un volume V nello spazio, sono dei lavori ($u_i g_i$ è infatti il lavoro che il campo di forze \mathbf{g} fa se i punti a cui è applicato si spostano per effetto del campo di forze \mathbf{f} , e viceversa per $v_i f_i$); portando uno dei due termini a destra del segno di uguale il teorema della reciprocità può essere letto nel modo seguente:

il lavoro compiuto da un campo di forze \mathbf{f} i cui punti di applicazione si spostano per effetto del campo di forze \mathbf{g} è uguale al lavoro fatto dal campo di forze \mathbf{g} i cui punti di applicazione si spostano per effetto del campo di forze \mathbf{f} , cioè si possono scambiare i ruoli del campo di forze e degli spostamenti fra loro ed ottenere lo stesso lavoro.

2.2 Teorema della rappresentazione

Si introduce il concetto, di cui si farà consistente uso nel seguito, di una forza elementare applicata impulsivamente (per un tempo infinitesimo) ad una particella situata nel punto $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ all'istante $t = \tau$. Se

³ $\frac{d}{dt} [\dot{u}v - \dot{v}u] = \ddot{u}v + \dot{u}\dot{v} - \ddot{v}u - \dot{v}\dot{u} = \ddot{u}v - \ddot{v}u$.

⁴ $\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} = c_{ijkl} \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) = c_{ijkl} u_{k,l}$. L'ultima uguaglianza è vera per le proprietà di simmetria del tensore c_{ijkl} , grazie alla sommatoria sottintesa sui due indici k e l .

⁵ Il tensore di quarto ordine c_{ijkl} , che lega gli sforzi σ_{ij} alle deformazioni e_{kl} , è simmetrico per scambio di i con j , di k con l e della coppia ij con la coppia kl .

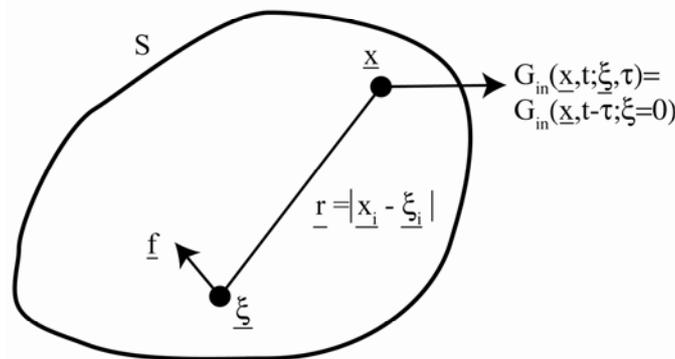
questa forza è diretta lungo l'asse x_n la sua generica componente i sarà nulla tranne che per $i = n$ e la sua intensità per unità di volume si potrà scrivere come:

$$f_i(\mathbf{x}, t) = F_0 \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in} \quad (2.8)$$

dove F_0 esprime la grandezza (o impulso) della forza, $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ indica la posizione della forza e $\delta(t - \tau)$ specifica l'istante di applicazione⁶. Si noti che, mentre $f_i(\mathbf{x}, t)$ ha dimensioni di forza per unità di volume, F_0 si misura in unità di forza per tempo (impulso), $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ è l'inverso di un volume e $\delta(t - \tau)$ è l'inverso di un tempo.

Si consideri, per il momento, di poter determinare, nello spazio e nel tempo, gli spostamenti che la forza impulsiva $g_n(\mathbf{x}, \tau)$ applicata nel punto \mathbf{x} e al tempo τ produce sul mezzo circostante, e si indichi con $G_{in}(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{x}, \tau)$ la componente i di tali spostamenti nel punto \mathbf{x} e al tempo t , per un impulso F_0 unitario⁷. Il tensore \mathbf{G} (le cui nove componenti esprimono la risposta del mezzo in ogni generica direzione per ciascuna delle possibili direzioni dell'impulso dopo che è trascorso un tempo $t - \tau$) è chiamato *funzione di Green elastodinamica* (fig. 2).

$$f_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) = F_0 \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in}$$



$$G_{in}(\underline{x}, t; \underline{\xi}, \tau) = G_{ni}(\underline{\xi}, t; \underline{x}, \tau)$$

Figura 2 Applicazione del teorema della rappresentazione.

La sostituzione del campo di forze $g_n(\mathbf{x}, \tau)$ nella (2.7)⁸ conduce alla:

⁶ In questa formula si è fatto uso della funzione *delta di Dirac* in una dimensione $\delta(t - \tau)$ definita uguale a zero se $t \neq \tau$, e tale che $\int \delta(t - \tau) dt = 1$. Parimenti si definisce la funzione delta di Dirac tridimensionale $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ uguale a zero se $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$, e tale che $\iiint \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV = 1$.

⁷ Si ricordi anche nel seguito che il tensore \mathbf{G} ha dimensioni di spostamento diviso per un impulso.

⁸ Per la proprietà di traslazione nel tempo del tensore elastodinamico di Green: $G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{in}(\mathbf{x}, t - \tau, \boldsymbol{\xi}, 0)$.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V u_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{,in} dV - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V f_i G_{ni}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_S \left\{ G_{ni}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) c_{ijkl} u_{k,l} - u_i c_{ijkl} G_{nk,l}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) \right\} dS.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

L'ulteriore semplificazione della (2.9) richiede l'applicazione di una importante proprietà della funzione delta di Dirac⁹ e la sostituzione delle tensioni esterne al posto delle deformazioni nel primo termine dell'integrale di superficie. Queste operazioni portano al *teorema della rappresentazione*, che fornisce la forma esplicita degli spostamenti dovuti all'azione di forze di volume e di tensioni su un corpo:

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V f_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) G_{ni}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) dV(\boldsymbol{\xi}) \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_S G_{ni}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) \tau_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) dS(\boldsymbol{\xi}) \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_S u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijkl}(\boldsymbol{\xi}) n_j \partial G_{nk}(\boldsymbol{\xi}, t - \tau; \mathbf{x}, 0) / \partial \xi_l dS(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Il primo termine a destra del segno di uguaglianza esprime il contributo delle forze di volume integrate su tutto il volume V del corpo, mentre il secondo e il terzo esprimono rispettivamente il contributo delle tensioni superficiali e degli spostamenti integrati su tutta la superficie S . Uno di questi due ultimi termini può eventualmente essere nullo se le condizioni al contorno imposte al problema fissano rispettivamente tensioni confinanti nulle (il corpo non si trova a contatto di altri materiali) o spostamenti superficiali nulli (il corpo è confinato da pareti infinitamente rigide).

2.3 Equivalenza fra forze e dislocazioni

Le formule introdotte nella sezione precedente consentono di trattare la generazione di onde elastiche prodotte da forze esterne al corpo considerato, in quanto anche le forze di volume hanno una causa esterna. Tuttavia esse non sono sufficienti a trattare il problema della generazione delle onde elastiche laddove esse sono prodotte da sorgenti discontinue, come esplosioni o fratture che si verificano su faglie. Per affrontare questo problema ora verranno trattate le sorgenti costituite da dislocazioni all'interno di un mezzo elastico, con o senza variazioni di volume.

Si consideri un corpo di volume V e superficie esterna S all'interno del quale esista una superficie di discontinuità Σ (sulla quale le tensioni sono nulle) nella quale possiamo riconoscere due facce opposte Σ^+ e Σ^- (fig. 3).

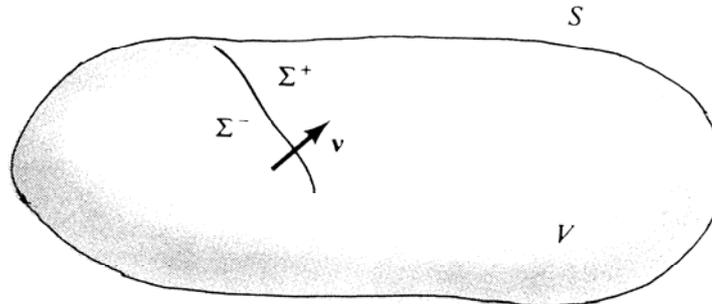


Figura 3 Esempio di sorgente costituita da dislocazioni all'interno di un mezzo elastico.

⁹ La funzione delta di Dirac gode della proprietà che per qualunque funzione $u(\mathbf{x})$, $u(\mathbf{x}) = \iiint \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) u(\boldsymbol{\xi}) dV$.

Si considerino Σ^+ e Σ^- come facenti parte a tutti gli effetti della superficie esterna del corpo; anzi, nel seguito della trattazione verranno trascurati tutti i contributi provenienti dalla superficie esterna S ad eccezione di Σ considerando che il corpo abbia dimensioni illimitate. In questo modo il teorema della rappresentazione (2.10) diviene:

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}, t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}) \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq}(\boldsymbol{\xi}) \left[\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) / \partial \xi_q \right] n_j d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta \sigma_{pq}(\boldsymbol{\xi}, \tau) G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) n_q d\Sigma(\boldsymbol{\xi}),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

dove il nuovo simbolo $\boldsymbol{\eta}$ sta a indicare specificamente le coordinate di ogni punto all'interno di V , mentre il simbolo $\boldsymbol{\xi}$ è riservato alle coordinate sulla superficie Σ e si è fatto uso di proprietà di simmetria del tensore \mathbf{G} per scambiare le coordinate della sorgente con quelle del ricevitore¹⁰.

Il simbolo Δ nei due ultimi termini della (2.11) ha il preciso significato di differenza fra i valori delle rispettive funzioni calcolati nel punto $\boldsymbol{\xi}$ sulle superfici Σ^+ e Σ^- .

In assenza di forze di volume (ovvero nessuna perturbazione dall'interno del corpo) e supponendo che attraverso la superficie Σ la tensione sia continua¹¹, la (2.11) si riduce a:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq}(\boldsymbol{\xi}) n_j \left[\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) / \partial \xi_q \right] d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.12}$$

Per ottenere una relazione di identità fra forze e dislocazioni che producono gli stessi spostamenti nel mezzo, si ricorre ad un'altra proprietà matematica della delta di Dirac:

$$\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\xi}, 0) / \partial \eta_q = - \iiint_V \left[\partial \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) / \partial \eta_q \right] G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta}), \tag{2.13}$$

così che per sostituzione nella (2.12):

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x}, t) = & \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iiint_V \left[- \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq} n_j \partial \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) / \partial \eta_q d\Sigma(\boldsymbol{\xi}) \right] G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta})
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Per similitudine con il primo termine della (2.11) si può affermare che l'espressione tra parentesi quadrate corrisponde identicamente alla quantità $f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau)$ che rappresenta una distribuzione di forze alla sorgente. Pertanto la conclusione a cui si è giunti è che la distribuzione di forze di volume equivalente alla dislocazione $\Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ sulla superficie Σ è data da:

$$f_p(\boldsymbol{\eta}, \tau) = - \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \tau) c_{ijpq} n_j \partial \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) / \partial \eta_q d\Sigma. \tag{2.15}$$

¹⁰ Il tensore elastodinamico di Green gode della proprietà $G_{in}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G_{ni}(\boldsymbol{\xi}, t; \mathbf{x}, \tau)$, dimostrabile attraverso il teorema della reciprocità, riducendo i campi di forze \mathbf{f} e \mathbf{g} a due sole delta di Dirac spazio temporali di pari intensità.

¹¹ Tale ipotesi è giustificata dalla condizione di equilibrio di un elemento di volume cilindrico con le due basi situate parallelamente a Σ su lati opposti a tale superficie, facendo tendere a zero l'altezza del cilindro.

Quindi il complesso delle dislocazioni sulla faglia può essere visto come un'opportuna distribuzione di forze.

2.4 Tensore del momento

Il punto di partenza per la trattazione delle sorgenti sismiche costituite da dislocazioni su superfici piane (come, per esempio, il movimento lungo faglie) è dato dalla rappresentazione (2.12) riscritta in forma concisa mediante il simbolo di convoluzione:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} (\Delta u_i n_j c_{ijpq}) * \partial G_{np} / \partial \xi_q d\Sigma \quad (2.16)$$

Come si può ricordare, la funzione G_{np} fornisce, per ogni elemento infinitesimo della superficie Σ , la componente n degli spostamenti dovuti a una forza impulsiva di ampiezza unitaria agente lungo l'asse p . L'importante osservazione da fare è che nella (2.16) compaiono, invece di G_{np} , le sue derivate rispetto alle coordinate spaziali. Queste derivate possono essere pensate come l'effetto, anziché di una singola forza, di una coppia di forze di uguale intensità, direzione opposta e i cui punti di applicazione sono separati da una distanza infinitesima lungo la direzione dell'asse q . La somma su q indica che per ogni componente della dislocazione esistono tre coppie i cui bracci sono sempre allineati lungo l'asse q ma in cui le forze hanno direzioni fra loro ortogonali.

Le tre componenti della normale alla superficie elementare piana comportano ciascuna tre coppie i cui bracci sono mutuamente perpendicolari (fig. 4). Così, il sistema di forze equivalente a un elemento di superficie $d\Sigma(\xi)$ può essere rappresentato da una combinazione di nove coppie. Come si può vedere in figura 4, esistono anche coppie con direzione delle forze e dei bracci coincidenti, chiamate *vettori dipolari*.

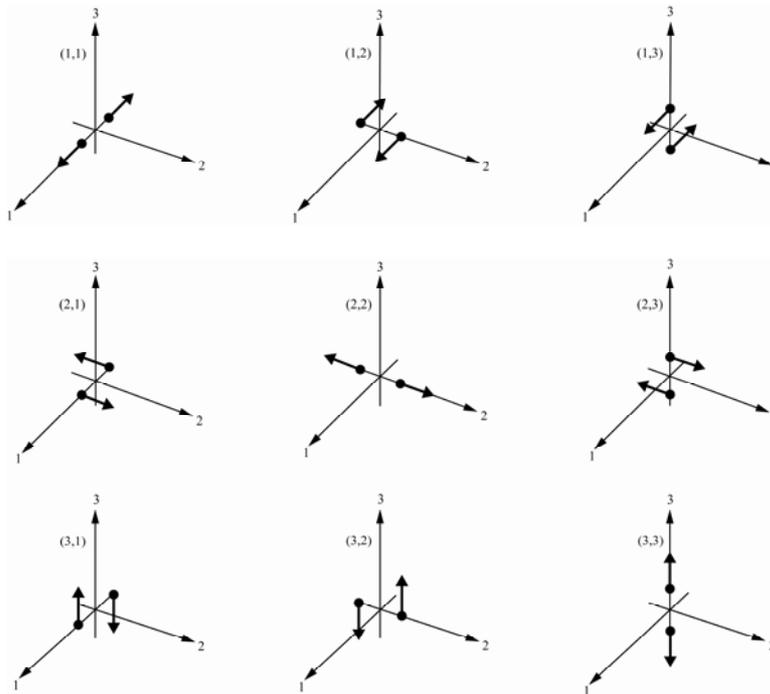


Figura 4 Le nove possibili coppie di forze equivalenti, ottenute per una sorgente orientata.

Dato che $(\Delta u_i n_j c_{ijpq}) * \partial G_{np} / \partial \xi_q$ nella (2.16) è il campo di spostamenti prodotto nel punto \mathbf{x} per effetto di una coppia in ξ , ne consegue che $\Delta u_i n_j c_{ijpq}$ rappresenta il momento della coppia (p,q) . Le dimensioni di $\Delta u_i n_j c_{ijpq}$ sono quelle di un momento per unità di area.

Definiamo

$$m_{pq} = \Delta u_i n_j c_{ijpq} \quad (2.17)$$

come la *densità del tensore del momento*, \mathbf{m} (avente le dimensioni fisiche di un momento di una forza per unità di superficie). Ricorrendo a questo tensore dipendente dal tempo, la cui simmetria discende da quella di c_{ijpq} , il teorema della rappresentazione per lo spostamento in \mathbf{x} dovuto alla discontinuità generalizzata $\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, t)$ su Σ è:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq} * \partial G_{np} / \partial \xi_q d\Sigma \quad (2.18)$$

Per un corpo isotropo, la (2.18) può essere così scritta:

$$m_{pq} = \lambda n_k \Delta u_k(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta_{pq} + \mu [n_p \Delta u_q(\boldsymbol{\xi}, \tau) + n_q \Delta u_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \quad (2.19)$$

Inoltre, nel caso in cui la discontinuità di spostamento (o dislocazione) sia parallela a Σ in $\boldsymbol{\xi}$, il prodotto scalare $\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u}$ è zero e quindi:

$$m_{pq} = \mu [n_p \Delta u_q(\boldsymbol{\xi}, \tau) + n_q \Delta u_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)] \quad (2.20)$$

Osservazione: per ogni elemento del momento sismico il termine a sinistra del segno di addizione è scambiabile con il termine a destra di tale segno, cioè non si può riconoscere dalla radiazione del momento sismico la direzione della normale alla faglia e la direzione dello slip.

Nel caso della superficie Σ coincidente con il piano $\xi_3 = 0$, con dislocazione diretta come l'asse ξ_1 il tensore densità del momento si riduce a:

$$\mathbf{m} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \Delta u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \Delta u_1(\boldsymbol{\xi}, \tau) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Così, una dislocazione di puro scorrimento è equivalente a due coppie di forze con momento opposto (fig. 5) chiamate comunemente *doppia coppia*.

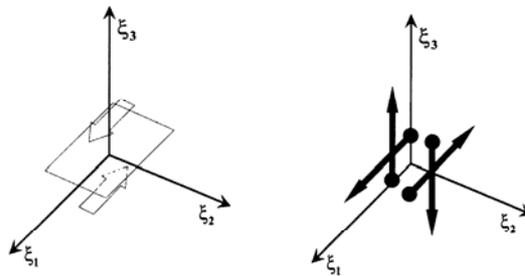


Figura 5 Equivalenza fra una dislocazione di puro scorrimento ed una doppia coppia.

Nel caso di un *crack tensile*¹² con piano di frattura coincidente con il piano $\xi_3 = 0$, soltanto la dislocazione diretta come l'asse ξ_3 è diversa da zero, e dalla (2.19) si ricava

$$\mathbf{m} \equiv \begin{pmatrix} \lambda \Delta u_3(\xi, \tau) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \Delta u_3(\xi, \tau) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \Delta u_3(\xi, \tau) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Così, un *crack tensile* equivale alla sovrapposizione di tre vettori dipolari ortogonali fra loro e con intensità rispettivamente proporzionale a λ , λ e $(\lambda + 2\mu)$ (fig. 6).

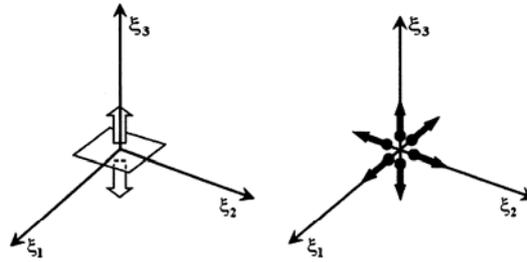


Figura 6 Equivalenza tra un *crack tensile* e tre dipoli di forze.

Tali risultati sono applicabili a sorgenti estese per integrazione di contributi relativi a elementi infinitesimi sulla superficie Σ della dislocazione. Se l'osservazione del campo di spostamenti è effettuata su onde di periodo sufficientemente lungo da poter considerare le dimensioni della sorgente trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda, i contributi dei diversi elementi si possono considerare approssimativamente in fase e tutti coerenti fra loro. In questo caso la dislocazione sull'intera superficie Σ si può considerare equivalente a un solo sistema di coppie applicato a un punto (il centro di Σ), con *tensore del momento* pari all'integrale della densità del momento su Σ . Così, per un'effettiva sorgente puntiforme,

$$u_n(\mathbf{x}, t) = M_{pq} * G_{np,q} \quad (2.23)$$

dove le componenti del tensore del momento sono:

$$M_{pq} = \iint_{\Sigma} m_{pq} d\Sigma = \iint_{\Sigma} \Delta u_i n_i c_{ijpq} d\Sigma \quad (2.24)$$

Il tensore del momento di una sorgente estesa può essere allora pensato come una distribuzione areale di infinite sorgenti puntiformi, ognuna delle quali è caratterizzata da un tensore del momento pari a $\mathbf{m}d\Sigma$.

¹² Un *crack* è una qualunque dislocazione sulla superficie che ha ampiezza nulla sul suo bordo, senza tener conto della direzione. Quindi, per *crack tensile*, si intende un *crack* in cui la dislocazione è normale alla superficie.

In termini di tensore del momento, la (2.21) si integra nella

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Le componenti non nulle di \mathbf{M} , che equivalgono al cosiddetto *momento sismico scalare*, sono date da:

$$M_0 = \mu \overline{\Delta u} S \quad (2.26)$$

dove $\overline{\Delta u}$ è la dislocazione media su Σ , S è l'area della superficie Σ e μ è la rigidità (i cui valori tipici variano tra 10^{10} e 10^{11} Pa).

2.5 Appendice 3

Applicazione del teorema di Gauss all'equazione del moto per un mezzo elastico continuo

Si consideri un campo vettoriale \mathbf{v} , e sia V un volume la cui superficie esterna è S (fig. 7).

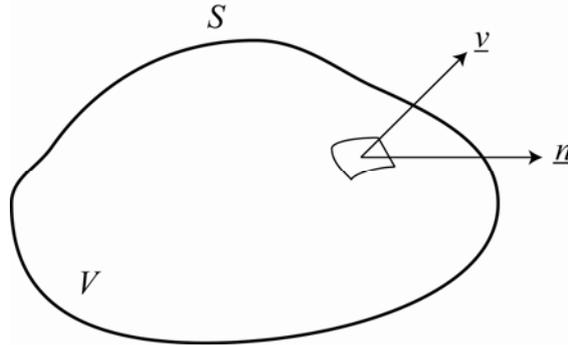


Figura 7 Volume di applicazione del teorema di Gauss.

Per i punti della superficie S che sono attraversati dalle linee di forza del campo vettoriale si considerino il vettore del campo \mathbf{v} e la normale \mathbf{n} , allora il teorema di Gauss afferma che:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) dS$$

Utilizzando la notazione fino ad ora espressa la precedente può essere così riscritta:

$$\iiint_V v_{i,j} dV = \iint_S v_j n_j dS$$

Immaginando che il tensore σ_{ij} sia suddiviso in 3 componenti $i = 1, 2, 3$ e j sia l'indice del vettore \mathbf{v} , applicando per ogni componente del tensore il teorema di Gauss si ottiene:

$$\iiint_V \sigma_{ij,j} dV = \iint_S \sigma_{ij} n_j dS$$

3 Radiazione di una sorgente sismica

3.1 Campo di spostamenti per una forza singola impulsiva

Gli spostamenti $u_n(\mathbf{x}, t)$ prodotti in un mezzo elastico da una forza impulsiva unitaria del tipo:

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in} \quad (3.1)$$

(dove f_i ha dimensioni di forza per unità di volume) sono dati dalla funzione di Green $G_{ni}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ che in un mezzo infinito soddisfa l'equazione dell'elastodinamica

$$c_{ijkl} \partial^2 G_{nk}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) / \partial x_i \partial x_l + \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau) \delta_{in} = \rho \partial^2 G_{ni}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) / \partial t^2 \quad (3.2)$$

Se il mezzo è omogeneo, isotropo ed illimitato la soluzione di campo lontano della (3.2)¹³ è data in ciascun punto \mathbf{x} dello spazio e all'istante di tempo t dalla funzione elastodinamica di Green:

$$G_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = 1/(4\pi\rho r^3) (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau \delta(t - \tau) d\tau + \\ + 1/(4\pi\rho r) \left[1/\alpha^2 \gamma_i\gamma_j \delta(t - r/\alpha) - 1/\beta^2 (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \delta(t - r/\beta) \right], \quad (3.3)$$

dove $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ è la distanza di ciascun punto \mathbf{x} dal punto di applicazione della forza $\boldsymbol{\xi}$, γ_i sono i coseni direttori del raggio vettore dal punto in cui si applica la forza al punto \mathbf{x} , ovvero $\gamma_i = (x_i - \xi_i)/r$, e $\alpha = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ e $\beta = (\mu/\rho)^{1/2}$ (con λ e μ costanti di Lamè del mezzo elastico e ρ la sua densità) sono rispettivamente le velocità delle onde P e S .

Come detto nel capitolo sull'elastodinamica, d'ora in avanti verrà trattato solo il caso di campo lontano, nell'ipotesi che la distanza tra la sorgente e il punto d'osservazione sia abbastanza grande. Si distinguono inoltre gli spostamenti prodotti dall'onda P da quelli prodotti dall'onda S definendo:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, t) = G_{ij}^P + G_{ij}^S(\mathbf{r}, t)$$

con

$$G_{ij}^P(\mathbf{r}, t) = 1/(4\pi\rho\alpha^2 r) \gamma_i\gamma_j \delta(t - r/\alpha) \quad (3.4)$$

$$G_{ij}^S(\mathbf{r}, t) = 1/(4\pi\rho\beta^2 r) (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j) \delta(t - r/\beta)$$

Facendo riferimento all'esempio mostrato nella figura 8, in cui la sorgente si trova localizzata nell'origine degli assi, i coseni direttori del raggio vettore sono $\gamma_i \equiv (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$.

¹³ Si veda la trattazione del problema dell'elastodinamica (capitolo 1) per una forza impulsiva in un mezzo omogeneo, isotropo ed illimitato, che passa attraverso i teoremi di Helmholtz e di Lamé.

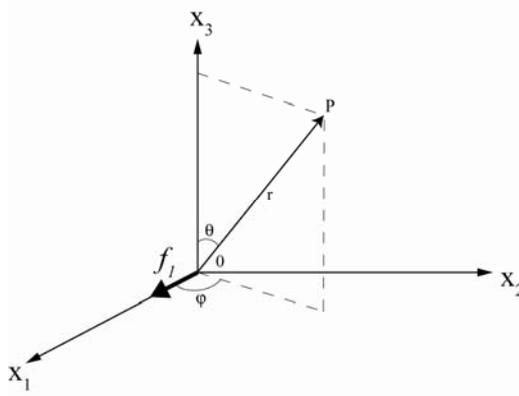


Figura 8 Sorgente localizzata nell'origine degli assi.

ESEMPIO:

Se la forza impulsiva f_j è diretta lungo l'asse x_1 , $f_j \equiv (1,0,0)$. Dunque, in tale caso tutti i termini con $j \neq 1$ sono nulli e, per sostituzione nella (3.4), si ha:

$$G_{i1}^P(r,t) = 1/(4\pi\rho\alpha^2 r) \delta(t-r/\alpha) \begin{pmatrix} \text{sen}^2\theta \cos^2\phi \\ (1/2)\text{sen}^2\theta \text{sen}(2\phi) \\ (1/2)\text{sen}(2\theta) \cos\phi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

e

$$G_{i1}^S(r,t) = 1/(4\pi\rho\beta^2 r) \delta(t-r/\beta) \begin{pmatrix} 1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi \\ -(1/2)\text{sen}^2\theta \text{sen}(2\phi) \\ -(1/2)\text{sen}(2\theta) \cos\phi \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Si può facilmente dimostrare che G_{i1}^P rappresenta le componenti di un vettore avente modulo $|G_1^P| = \text{sen}\theta \cos\phi$ e diretto come il raggio vettore \mathbf{x} (proprietà longitudinale dell'onda P); lo spostamento prodotto dall'onda P è sempre parallelo al vettore \mathbf{r} . G_{i1}^S rappresenta, invece, un vettore di modulo pari a $|G_1^S| = (1 - \text{sen}^2\theta \cos^2\phi)^{1/2}$ con direzione perpendicolare a \mathbf{x} (proprietà trasversale dell'onda S). Lo spostamento prodotto dall'onda S è sempre perpendicolare ad \mathbf{r} , questo però non definisce la sua direzione ma solo il piano su cui avviene lo spostamento; l'onda S infatti è polarizzabile, cioè è caratterizzata da una precisa direzione dello spostamento sul piano). La figura 9 mostra l'ampiezza delle funzioni $|G_1^P|$ e $|G_1^S|$ sul piano (x_1, x_2) .

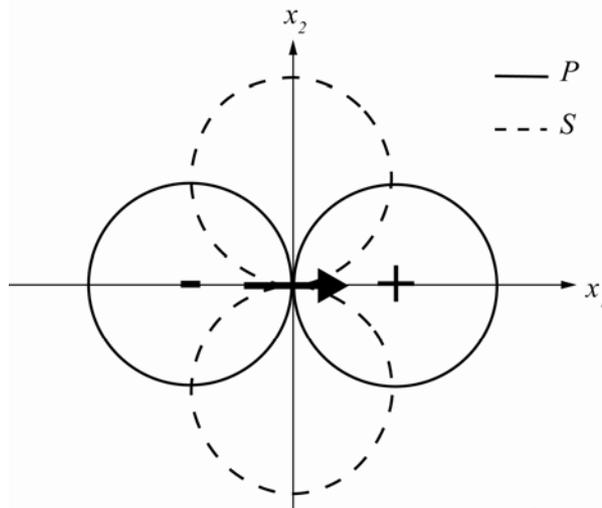


Figura 9 Ampiezza delle funzioni $G_1^{P,S}$.

3.2 Campo di spostamenti per il tensore dei momenti

Per il teorema di rappresentazione, il campo di spostamenti dato da una generica dislocazione su una superficie Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
 u_n(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq}(\xi) n_j \left[\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q \right] d\Sigma(\xi) = \\
 &= \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijpq}(\xi) n_j * \left[\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q \right] d\Sigma(\xi)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

In forma più concisa, per qualunque forma del tensore dei momenti:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \iint_{\Sigma} m_{pq}(\xi, \tau) * \left[\partial G_{np}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_q \right] d\Sigma(\xi) \tag{3.8}$$

La forma data alla funzione di Green nella (3.4) consente di ottenere il campo di spostamenti prodotto da una sorgente rappresentata da un tensore dei momenti variabile nel tempo, separatamente per l'onda P e l'onda S .

Per l'onda P si ha¹⁴:

$$\begin{aligned}
 \partial G_{np}^P / \partial \xi_q &= 1 / (4\pi\rho\alpha^2 r) \gamma_n \gamma_p \partial \delta(t - r / \alpha) / \partial \xi_q \\
 &= 1 / (4\pi\rho\alpha^3 r) \gamma_n \gamma_p \gamma_q \partial \delta(t - r / \alpha) / \partial t
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sostituendo la (3.9) nella (3.8), per le proprietà già viste della derivata della delta di Dirac rispetto al tempo, si giunge a:

$$u_n^P(\mathbf{x}, t) = 1 / (4\pi\rho\alpha^3 r) \gamma_n \gamma_p \gamma_q \iint_{\Sigma} \partial m_{pq}(\xi, t - r / \alpha) / \partial t d\Sigma(\xi). \tag{3.10}$$

¹⁴ Si sono utilizzati i seguenti passaggi: $\partial \delta(t-r/\alpha) / \partial \xi_q = \partial \delta(t-r/\alpha) / \partial r \cdot \partial r / \partial \xi_q = -1/\alpha \partial \delta(t-r/\alpha) / \partial t (-\gamma_q) = 1/\alpha \gamma_q \partial \delta(t-r/\alpha) / \partial t$; si osservi come una proprietà geometrica della sorgente diventa una proprietà dinamica, attraverso la velocità di propagazione del campo di spostamenti. Inoltre si è tenuto conto che $\partial(1/r)$ decade come $1/r^2$, che in condizioni di campo lontano è trascurabile.

Similmente, per l'onda S si può ricavare:

$$u_n^S(\mathbf{x}, t) = 1/(4\pi\rho\beta^3 r)(\delta_{np} - \gamma_n\gamma_p)\gamma_q \iint_{\Sigma} \partial m_{pq}(\xi, t - r/\beta) / \partial t d\Sigma(\xi). \quad (3.11)$$

È molto importante notare che, per tutti e due i tipi di onde, è la variazione nel tempo del tensore dei momenti che genera le onde sismiche, e non il suo valore istantaneo.

3.3 Funzioni di irraggiamento

Le due funzioni:

$$R_{npq}^P = \gamma_n\gamma_p\gamma_q \quad (3.12)$$

e

$$R_{npq}^S = (\delta_{np} - \gamma_n\gamma_p)\gamma_q$$

vengono rispettivamente chiamate *funzioni di irraggiamento (radiation pattern)* per le onde P e S . Il campo di spostamenti corrispondente all'onda P ha sempre direzione radiale rispetto alla sorgente (se questa è puntiforme), infatti le sue tre componenti hanno ampiezza proporzionale ai coseni direttori γ_n . L'ampiezza R_{pq}^P di questi spostamenti, dovuti alle singole coppie che compongono il tensore dei momenti m_{pq} , si calcola mediante il prodotto scalare del vettore che ha per componenti R_{npq}^P con il versore che ha per componenti γ_n . Questo ha ovviamente come risultato il prodotto $\gamma_p\gamma_q$ che, esplicitando i valori dei coseni direttori mediante gli angoli che il raggio vettore \mathbf{r} forma con gli assi del sistema di riferimento cartesiano, porta ai valori riportati in tabella I.

La direzione dello spostamento prodotto dal passaggio dell'onda S , invece, può avere una qualunque direzione perpendicolare a quella della P . Questo si può facilmente dimostrare osservando che il prodotto scalare del vettore che ha componenti $(\delta_{np} - \gamma_n\gamma_p)$ per il versore che ha per componenti γ_n è nullo a prescindere dall'indice p .

In sismologia è consuetudine suddividere il campo di spostamenti prodotto dall'onda S in due componenti: quello contenuto nel piano passante per l'asse x_3 e il raggio vettore \mathbf{x} (chiamato S^V) e quello parallelo al piano (x_1, x_2) (chiamato S^H). Il calcolo dell'ampiezza di queste due componenti presenta qualche difficoltà in più rispetto a quella dell'onda P . Un modo abbastanza elementare per giungere alla determinazione dell'ampiezza delle componenti S^V e S^H può essere quello di determinare prima le componenti dei relativi versori nel sistema di riferimento cartesiano, e di calcolarne poi il prodotto scalare con il campo totale dell'onda S dato dalla seconda delle (3.12). Applicando semplici criteri di geometria analitica, le componenti dei versori S^V e S^H risultano essere rispettivamente:

$$\begin{cases} S_1^V = -\gamma_1\gamma_3 / (\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2} = -\cos\theta \cos\phi \\ S_2^V = -\gamma_1\gamma_3 / (\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2} = -\cos\theta \sin\phi \\ S_3^V = \left[1 - \left((S_1^V)^2 + (S_2^V)^2 \right) \right]^{1/2} = -\sin\phi \end{cases} \quad (3.13)$$

e

$$\begin{cases} S_1^H = \gamma_2 / (\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2} = \sin\phi \\ S_2^H = -\gamma_1 / (\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2} = -\cos\phi \\ S_3^H = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Le funzioni di irraggiamento per il modulo delle componenti S^V e S^H sono elencate nella tabella I.

A partire dalle funzioni di irraggiamento relative alle singole coppie e dipoli di forze che compongono il tensore dei momenti, sarà così possibile ottenere la funzione di irraggiamento di una sorgente comunque complessa. Infatti, ricordando che, come al solito, gli indici p e q ripetuti nella (3.10) e nella (3.11) stanno a significare la somma su tali indici, il campo di spostamenti causati dal tensore dei momenti sarà dato dalla somma dei nove elementi della tabella I, moltiplicati per i rispettivi elementi del tensore $\hat{\partial}m_{pq}/\hat{\partial}t$.

Tabella I

Funzioni di irraggiamento

	P	S^V	S^H
R_{11}	$\text{sen}^2\theta \cos^2\phi$	$-\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \cos^2\phi$	$\frac{1}{2} \text{sen}\theta \text{sen}(2\phi)$
R_{12}	$\frac{1}{2} \text{sen}^2\theta \text{sen}(2\phi)$	$-\frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \sin(2\phi)$	$\text{sen}\theta \text{sen}^2\phi$
R_{13}	$\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \cos\phi$	$-\cos^2\theta \cos\phi$	$\cos\theta \cos\phi$
R_{21}	$\frac{1}{2} \text{sen}^2\theta \text{sen}(2\phi)$	$-\frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \sin(2\phi)$	$-\text{sen}\theta \cos^2\phi$
R_{22}	$\text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi$	$-\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \sin^2\phi$	$-\frac{1}{2} \text{sen}\theta \text{sen}(2\phi)$
R_{23}	$\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \text{sen}\phi$	$-\cos^2\theta \sin\phi$	$-\cos\theta \cos\phi$
R_{31}	$\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \cos\phi$	$\text{sen}^2\theta \cos\phi$	0
R_{32}	$\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \text{sen}\phi$	$\text{sen}^2\theta \sin\phi$	0
R_{33}	$\cos^2\theta$	$\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta)$	0

Osservazione: si noti che le ampiezze delle onde P si conservano per scambio degli indici del tensore R_{pq}^P (il tensore è simmetrico). Questa simmetria non si ha invece per le onde S . Questa è stata la via per dimostrare che il modello più realistico di una sorgente sismica è quello di tipo doppia coppia. Misurando infatti le ampiezze delle S^V per delle sorgenti reali si è visto che il modello con la coppia semplice non le soddisfa al contrario di quello con la doppia coppia.

3.4 Radiazione di una sorgente puntiforme

Come si è visto nel capitolo dedicato alla rappresentazione della sorgente sismica, se la lunghezza d'onda delle onde osservate è tale da ritenere trascurabili le dimensioni della sorgente, si può introdurre il concetto di tensore del momento sismico concentrato in un punto. Così, mediante le funzioni di irraggiamento, la (3.10) e la (3.11) si possono scrivere rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 u^P(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\alpha^3 r) R_{pq}^P \partial M_{pq}(t - r/\alpha) / \partial t \\
 u^{SV}(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SV} \partial M_{pq}(t - r/\beta) / \partial t \\
 u^{SH}(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SH} \partial M_{pq}(t - r/\beta) / \partial t
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Passando nel dominio delle frequenze, chiamando con $U(\mathbf{x}, \omega)$ le trasformate delle $u(\mathbf{x}, t)$, le relazioni (3.15) si possono scrivere:

$$\begin{aligned}
U^P(\mathbf{x}, \omega) &= 1/(4\pi\rho\alpha^3 r) R_{pq}^P \int_0^\infty \partial M_{pq}(t-r/\alpha) / \partial t e^{-i\omega t} dt, \\
U^{SV}(\mathbf{x}, \omega) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SV} \int_0^\infty \partial M_{pq}(t-r/\beta) / \partial t e^{-i\omega t} dt \\
&e \\
U^{SH}(\mathbf{x}, \omega) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SH} \int_0^\infty \partial M_{pq}(t-r/\beta) / \partial t e^{-i\omega t} dt.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Facendo tendere la frequenza a zero, i termini a destra del segno uguale tendono a un valore costante dato da:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \partial M_{pq}(t-r/\alpha) / \partial t e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \partial M_{pq}(t-r/\alpha) / \partial t dt = M_{pq}(\infty) - M_{pq}(0) \tag{3.17}$$

giungendo quindi all'importante relazione che lega il valore spettrale a frequenza nulla dello spostamento in campo lontano alla variazione del momento sismico:

$$\begin{aligned}
U^P(\mathbf{x}, 0) &= 1/(4\pi\rho\alpha^3 r) R_{pq}^P [M_{pq}(\infty) - M_{pq}(0)], \\
U^{SV}(\mathbf{x}, 0) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SV} [M_{pq}(\infty) - M_{pq}(0)] \\
&e \\
U^{SH}(\mathbf{x}, 0) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{pq}^{SH} [M_{pq}(\infty) - M_{pq}(0)].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

In questo modo si può determinare sperimentalmente il momento sismico di un terremoto mediante osservazione sismografica, calcolando l'ampiezza spettrale dello spostamento del terreno registrato da un sismografo per le varie onde, alla frequenza che tende a zero, e tenendo conto dei vari fattori numerici presenti nelle (3.18).

4 Meccanismi focali di frattura

4.1 Meccanismo di sorgente con frattura

Si consideri l'espressione (2.12) del capitolo riguardante la rappresentazione delle sorgenti sismiche per gli spostamenti prodotti nel *campo lontano* da una dislocazione su una superficie:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{\Sigma} \Delta u_i(\xi, \tau) c_{ijkl}(\xi) n_j(\xi) \partial G_{nk}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi, 0) / \partial \xi_l d\Sigma(\xi) \tag{4.1}$$

effettuando alcune semplificazioni.

Se la dislocazione avviene su una superficie piana, la normale alla superficie mantiene una direzione uniforme e i suoi coseni direttori n_j sono costanti su tutta la superficie Σ :

$$n_j(\xi) = n_j$$

Se la dislocazione avviene ovunque con la stessa forma temporale $F(\tau)$:

$$\Delta u_i(\xi, \tau) = \Delta u_i(\xi) F(\tau) \tag{4.2}$$

Se la dislocazione è uniforme su tutta la superficie Σ :

$$\Delta u_i(\xi) = \Delta u_i \quad (4.3)$$

Se la dislocazione mantiene direzione costante, rappresentata dai suoi coseni direttori l_i :

$$\Delta u_i = \Delta u l_i \quad (4.4)$$

dove Δu è il modulo della dislocazione.

Se il mezzo elastico è omogeneo:

$$c_{ijkl}(\xi) = c_{ijkl} \quad (4.5)$$

Se il mezzo elastico è isotropo, dai principi di elasticità si può scrivere:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.6)$$

Se la funzione di Green è uniforme su tutta la superficie Σ , cioè lunghezza d'onda λ è molto più grande della dimensione della sorgente del terremoto:

$$\partial G_{nk}(x, t - \tau, \xi, 0) / \partial \xi_l = -\partial G_{nk}(x, t - \tau) / \partial x_l. \quad (4.7)$$

La semplificazione (4.3) è quella meno realistica, dato che invece sarebbe più logico pensare che l'ampiezza della dislocazione vada diminuendo dal centro della superficie Σ , fino ad annullarsi ai suoi bordi.

Con le semplificazioni ora introdotte, la (4.1) si riduce a:

$$u_n(\mathbf{x}, t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta u F(\tau) S \left[\lambda \nu_k l_k \delta_{ij} + \mu (n_i l_j + n_j l_i) \right] \left[\partial G_{ni}(\mathbf{x}, t - \tau) / \partial x_j \right] d\tau \quad (4.8)$$

In accordo a quanto detto nel capitolo sulla rappresentazione delle sorgenti sismiche si definisce il *tensore del momento* mediante le sue componenti:

$$M_{ij}(\tau) = \Delta u F(\tau) S \left[\lambda n_k l_k \delta_{ij} + \mu (n_i l_j + n_j l_i) \right], \quad (4.9)$$

analoga alla (2.19) del suddetto capitolo.

I termini diagonali (con $i = j$) rappresentano dilatazioni (o compressioni) nella direzione degli assi cartesiani. I termini non diagonali (con $i \neq j$) rappresentano movimenti di taglio.

Come si è già visto, se la frattura è puramente di taglio, vale a dire quando $n_k l_k = 0$, il tensore del momento sismico si può scrivere:

$$M_{ij}(\tau) = \mu \Delta u F(\tau) S (n_i l_j + n_j l_i) = M_0(\tau) (n_i l_j + n_j l_i) \quad (4.10)$$

dove $M_0(\tau) = \mu \Delta u S F(\tau)$ è il *momento sismico scalare*. La (4.10) esprime il fatto che per una sorgente sismica di taglio, se si scambiano fra loro n_i e l_j il risultato non cambia. Questo significa che l'espressione (4.10) è simmetrica rispetto alla normale al piano di frattura e alla direzione della dislocazione, vale a dire

queste due direzioni non saranno distinguibili dall'osservazione dell'ampiezza degli spostamenti prodotti dalla dislocazione nel campo lontano

4.2 Funzione di irraggiamento di una frattura di taglio orientata secondo gli assi

Nel capitolo sulla radiazione sismica si è visto che le onde elastiche prodotte in campo lontano da una sorgente di dimensioni trascurabili rispetto alle lunghezze d'onda in gioco si possono distinguere in onde P , S^V e S^H . I rispettivi campi di spostamento si possono esprimere, avendo esplicitato la funzione di Green tramite le funzioni di irraggiamento, con le formule:

$$\begin{aligned} u^P(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\alpha^3 r) R_{kl}^P \partial M_{kl}(t-r/\alpha)/\partial t \quad , \\ u^{SV}(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{kl}^{SV} \partial M_{kl}(t-r/\beta)/\partial t \\ e \\ u^{SH}(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) R_{kl}^{SH} \partial M_{kl}(t-r/\beta)/\partial t \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sostituendo le (4.10) nelle (4.11) si ottiene l'espressione generale dei campi di radiazione elastica prodotti da una frattura piana di taglio. Verrà svolto questo esercizio in un caso particolare, immaginando che il piano della dislocazione coincida con il piano (x_1, x_2) , vale a dire che l'unica componente della sua normale diversa da zero sia la componente n_3 . Ulteriore ipotesi: che la dislocazione avvenga tutta nella direzione x_1 , così che la sua unica componente non nulla sarà l_1 . In questo caso il tensore del momento sismico si riduce a

$$M_{ij}(\tau) = M_0(\tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

ossia un sistema di forze formato da due coppie complanari di momento opposto (*doppia coppia*).

Per sostituzione della (4.12) nelle (4.11), facendo uso delle funzioni di irraggiamento date nella tabella I del capitolo sulla radiazione della sorgente sismica, si ottiene:

$$\begin{aligned} u^P(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\alpha^3 r) \partial M_0(t-r/\alpha)/\partial t \operatorname{sen}(2\theta) \cos\phi \quad , \\ u^{SV}(\mathbf{x}, t) &= -1/(4\pi\rho\beta^3 r) \partial M_0(t-r/\beta)/\partial t \cos(2\theta) \cos\phi \\ e \\ u^{SH}(\mathbf{x}, t) &= 1/(4\pi\rho\beta^3 r) \partial M_0(t-r/\beta)/\partial t \cos\theta \cos\phi \quad . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si possono pertanto definire le funzioni di irraggiamento per la dislocazione di taglio (equivalente ad una doppia coppia) come:

$$\begin{aligned} R^P(\theta, \phi) &= \operatorname{sen}(2\theta) \cos\phi \quad , \\ R^{SV}(\theta, \phi) &= \cos(2\theta) \cos\phi \\ e \\ R^{SH}(\theta, \phi) &= \cos\theta \cos\phi \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sul piano $\phi = 0$, coincidente con il piano (x_1, x_3) , R^P assume l'aspetto mostrato in figura 10, con quattro lobi aventi ampiezze massime a 45° dagli assi x_1 e x_3 e segno alternativamente positivo e negativo passando da un quadrante all'altro. R^{SV} si comporta come R^P , ma con uno sfasamento di 45° rispetto a θ (fig. 11). R^{SH} presenta due soli lobi. Sul piano $\theta = 90^\circ$, coincidente con il piano (x_1, x_2) , R^P e R^{SH} sono identicamente nulle e R^{SV} presenta due soli lobi. Sul piano $\phi = 90^\circ$, coincidente con il piano (x_2, x_3) , tutte le funzioni di irraggiamento sono identicamente nulle.

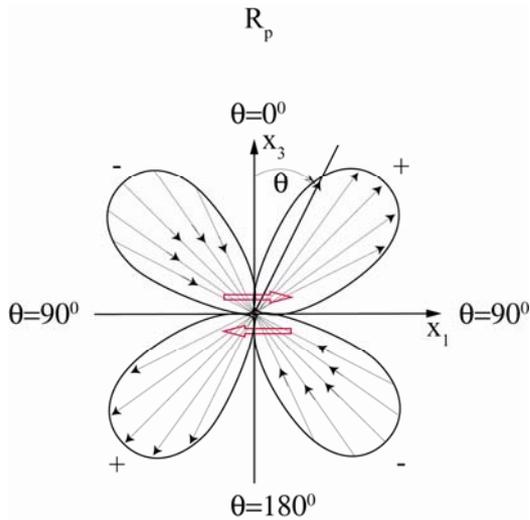


Figura 10 Funzione di irraggiamento R_p .

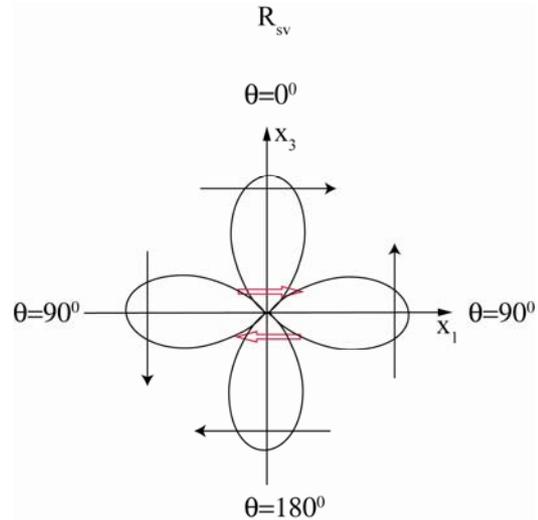


Figura 11 Funzione di irraggiamento R_{sv} .

Ruotando il sistema di riferimento cartesiano di 45° rispetto all'asse x_2 il tensore del momento sismico si diagonalizza modificandosi in

$$M_{ij}(\tau) = M_0(\tau) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

che rappresenta due vettori dipolari rispettivamente ortogonali e giacenti sul piano (x_1, x_3) . Uno dei due dipoli di forze determina una pressione e l'altro una tensione.

4.3 Funzione di irraggiamento di una frattura di taglio orientata arbitrariamente

La frattura di taglio considerata nelle sezioni precedenti rappresenta un modello ideale di sorgente di onde sismiche generate da un movimento su una *faglia*. In Geologia si chiama appunto faglia il risultato visibile sul terreno di una frattura verificatisi all'interno della Terra. L'orientazione di una faglia viene data dalla *direzione* (*azimut* o *strike*) della sua traccia, ϕ_s , misurata dal nord in senso positivo verso est, l'*inclinazione* (*dip*) δ misurata dal piano orizzontale, e l'angolo di *dislocazione* (*rake*) λ , misurato dalla retta orizzontale sul piano di faglia (fig. 12) in senso antiorario guardando la faglia dal semispazio superiore (identificabile anche con il termine geologico *tetto*).

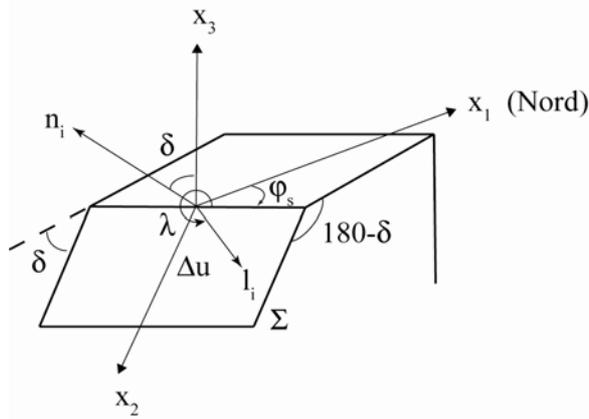


Figura 12 Rappresentazione geologica di una faglia.

Si noti che gli intervalli di variazione di ϕ_s , δ e λ sono, per convenzione, rispettivamente $0^\circ \div 360^\circ$, $0^\circ \div 90^\circ$ e $-180^\circ \div 180^\circ$. Le componenti dei vettori \mathbf{n} e \mathbf{l} (con $\mathbf{n} \perp \mathbf{l}$) in funzione degli angoli sono:

$$\begin{aligned} n_1 &= -\text{sen}\delta \text{sen}\phi_s \\ n_2 &= \text{sen}\delta \cos\phi_s \\ n_3 &= -\cos\delta \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos\lambda \cos\phi_s + \cos\delta \cos\lambda \text{sen}\phi_s \\ l_2 &= \cos\lambda \text{sen}\phi_s - \cos\delta \text{sen}\lambda \cos\phi_s \\ l_3 &= -\text{sen}\lambda \cos\phi_s \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ricordando la (4.10), le componenti del tensore (intensità delle coppie) del momento sismico in funzione degli angoli ϕ_s , δ e λ sono proporzionali, a meno di un fattore moltiplicativo $M_0(\tau)$, a:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -\text{sen}\delta \cos\lambda \text{sen}(2\phi_s) - \text{sen}(2\delta) \text{sen}^2\phi_s \text{sen}\lambda \\ M_{12} &= \text{sen}\delta \cos\lambda \text{sen}(2\phi_s) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\delta) \text{sen}(2\phi_s) \text{sen}\lambda \\ M_{13} &= \text{sen}\lambda \text{sen}\phi_s \cos(2\delta) - \cos\delta \cos\phi_s \cos\lambda \\ M_{21} &= \text{sen}\delta \cos\lambda \cos(2\phi_s) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\delta) \text{sen}2\phi_s \text{sen}\lambda \\ M_{22} &= \text{sen}\delta \cos\lambda \text{sen}(2\phi_s) - \text{sen}(2\delta) \cos^2\phi_s \text{sen}\lambda \\ M_{23} &= \text{sen}\phi_s \text{sen}\lambda \cos(2\phi) - \cos\delta \cos\lambda \text{sen}\phi_s \\ M_{31} &= \text{sen}\lambda \text{sen}\phi_s \cos(2\delta) - \cos\delta \cos\phi_s \cos\lambda \\ M_{32} &= \text{sen}\phi_s \text{sen}\lambda \cos(2\phi) - \cos\delta \cos\lambda \text{sen}\phi_s \\ M_{33} &= \text{sen}(2\delta) \text{sen}\lambda \end{aligned} \quad (4.18)$$

Anche in questo caso più generale si potranno sostituire le espressioni (4.18) nelle (4.11) facendo uso delle espressioni precedentemente ottenute per le funzioni di irraggiamento. Effettuando tutte le somme necessarie sugli indici k e l , si ottengono le funzioni di irraggiamento per un generico meccanismo di frattura in funzione dei tre parametri della faglia e dei due angoli che caratterizzano la direzione del raggio sismico:

$$\begin{aligned}
R^P &= \cos \lambda \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen}^2 (\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \operatorname{sen} 2\theta \cos (\phi - \phi_s) + \\
&+ \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} 2\delta \left[\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 (\phi - \phi_s) \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \\
&+ \operatorname{sen} \lambda \cos 2\delta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} (\phi - \phi_s) , \\
R^{SV} &= \operatorname{sen} \lambda \cos 2\delta \cos 2\theta \operatorname{sen} 2(\phi - \phi_s) - \cos \lambda \cos \delta \operatorname{sen} 2\theta \cos (\phi - \phi_s) + \\
&+ \frac{1}{2} \cos \lambda \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2(\phi - \phi_s) - \\
&- \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} 2\lambda \operatorname{sen} 2\theta \left[1 + \operatorname{sen}^2 (\phi - \phi_s) \right] \operatorname{sen} \theta , \\
R^{SH} &= \cos \lambda \cos \delta \cos \theta \operatorname{sen} (\phi - \phi_s) + \cos \lambda \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta \cos 2(\phi - \phi_s) + \\
&+ \operatorname{sen} \lambda \cos 2\delta \cos \theta \cos (\phi - \phi_s) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2(\phi - \phi_s)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Le equazioni (4.19) costituiscono in sostanza una rotazione rigida delle funzioni di irraggiamento (4.14) rispetto agli angoli ϕ_s , δ e λ . Come si può subito notare, tutte le funzioni dipendono da ϕ e da ϕ_s alla stessa maniera, cosicché una variazione di quantità uguale dei due angoli non ne modifica il valore (ruotando orizzontalmente la sorgente si ottiene lo stesso risultato che si avrebbe ruotando il punto di osservazione dello stesso angolo in verso opposto).

Concludendo:

- la sorgente di taglio puro è descritta in maniera generale da un numero che è il momento sismico scalare (un grado di libertà) e da 3 numeri che rappresentano la geometria della faglia (tre gradi di libertà); quindi la sorgente sismica più generale di questo tipo ha 4 gradi di libertà; dal tensore a 6 componenti indipendenti introdotto inizialmente, avendo imposto la natura di taglio puro della sorgente si è passati ad uno a 4; i due vincoli aggiuntivi sono rappresentati dalla nullità del determinante e della traccia del tensore;
- determinare il meccanismo di faglia significa ricavare dalle misure delle ampiezze R^P , R^{SV} , R^{SH} il modello che le verifica.

La funzione R^P data dalla (4.19), a somiglianza di quella data dalla (4.14) presenta valori compresi fra -1 e 1. I valori negativi (*dilatazioni*) sono separati dai valori positivi (*compressioni*) da due piani fra loro ortogonali, di cui uno coincide con il piano di frattura e l'altro (piano *ausiliario*) è perpendicolare a quest'ultimo e al versore della dislocazione \mathbf{I} . Questi due piani si chiamano *piani nodali* e generalmente vengono indicati con le lettere A e B , senza nessuna particolare associazione di una di queste due lettere al piano di frattura o al suo piano ausiliario.

4.4 La sfera focale e le sue proiezioni

Le equazioni sviluppate nelle precedenti sezioni per gli spostamenti prodotti da sorgenti sismiche presuppongono un mezzo elastico omogeneo, il che non è certo il caso della Terra. Sarà necessario, pertanto, tener conto della mancanza di omogeneità dei materiali della Terra nella propagazione delle onde sismiche.

Nel passato si usava riportare su una rappresentazione della superficie terrestre i punti dove i raggi sismici delle onde osservate a varie stazioni sarebbero pervenuti se i raggi avessero compiuto traiettorie rettilinee, come in un modello di Terra omogenea. Questi punti si proiettavano sul piano equatoriale a partire dal punto antipodale al fuoco. Le posizioni così ottenute si denominavano *distanze distese*. In questo metodo, chiamato metodo di *Byerly*, i piani nodali si rappresentavano come cerchi sul piano di proiezione. Modernamente si fa uso del concetto di *sfera focale*: una sfera di materiale omogeneo e raggio unitario, con centro nel punto focale del sisma. Dal centro alla superficie di questa sfera le onde si possono immaginare

propagarsi in accordo alle equazioni ricavate per un mezzo con tali caratteristiche. Nell'uso di questo concetto, la posizione delle stazioni sulla superficie della Terra di cui si dispongono le registrazioni da analizzare si riconduce alla posizione equivalente sulla sfera focale. Ciascun punto, associato a una stazione S , con distanza angolare Δ dall'epicentro e azimuth ϕ , si proietta sulla sfera focale seguendo la traiettoria del relativo raggio sismico e rimane definito dalle sue coordinate polari ϕ e θ (fig. 13), essendo

ϕ = azimuth della stazione rispetto all'epicentro (angolo che forma la direzione orizzontale rispetto al nord geografico contato verso est), compreso tra 0 e 360°.

θ = angolo di incidenza (*take off*) del raggio sismico al fuoco (misurato rispetto alla verticale diretta verso il basso), compreso tra 0 e 180°.

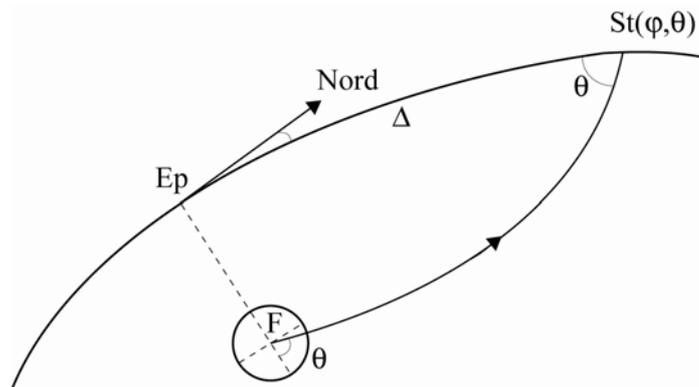


Figura 13 Rappresentazione di un raggio sismico dalla sfera focale alla stazione.

Per distanze telesismiche l'angolo θ si calcola a partire dalle dromocrone nella forma:

$$\text{sen}\theta = v_h dt / d\Delta, \quad (4.20)$$

dove v_h è la velocità delle onde nel mezzo alla profondità h e $dt/d\Delta$ è l'inverso della velocità apparente in superficie (*slowness*).

Per terremoti vicini ($0 \leq \Delta \leq 1000 \text{ km}$) ci sono due importanti fattori che hanno grande influenza nel calcolo di θ . Da un lato, c'è la profondità ipocentrale h , che è uno dei parametri focali di più difficile determinazione. Inoltre è necessario conoscere in dettaglio la struttura della crosta per determinare con precisione la traiettoria del raggio e conseguentemente il valore di θ . I raggi rifratti su superfici di discontinuità tra due strati a velocità diversa hanno lo stesso θ indipendentemente dalla distanza Δ della stazione. In relazione a ciò è consuetudine usare un modello di crosta con uno o più gradienti di velocità.

Normalmente, per la determinazione pratica del meccanismo focale di un terremoto non si utilizza direttamente la sfera focale, ma la sua proiezione su un piano. Tra i due tipi di proiezione più comunemente usati descriviamo la proiezione stereografica polare, detta anche di *Wulff*. In questa proiezione, un punto S situato sulla sfera focale si proietta come S' sul piano orizzontale, in modo che $OS' = \text{tg}(\theta/2)$ (fig. 14). Un piano di faglia interseca la sfera focale su un cerchio massimo, e questo si proietta come un arco di cerchio sul piano orizzontale. L'altro piano che separa le polarità positive da quella negative si disegna sul piano di proiezione come un secondo arco di cerchio che interseca il primo in un punto dove le rispettive tangenti sono perpendicolari.

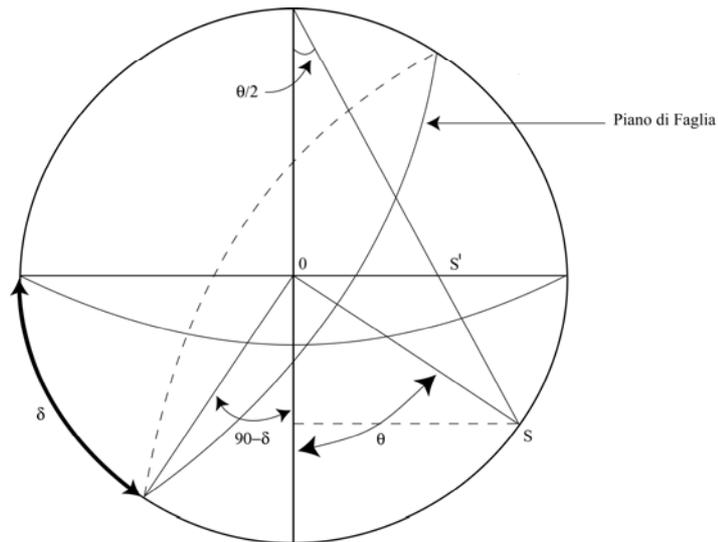


Figura 14 Proiezione stereografica polare (o di *Wulff*).

La figura 15 mostra l'aspetto delle proiezioni dei piani nodali in funzione delle loro inclinazione e fornisce anche la misura degli spostamenti angolari sulle proiezioni dei cerchi massimi. Questa figura, comunemente conosciuta come *reticolo di Wulff*, viene usata per la determinazione grafica del meccanismo focale a partire dall'osservazione delle polarità dei primi arrivi.

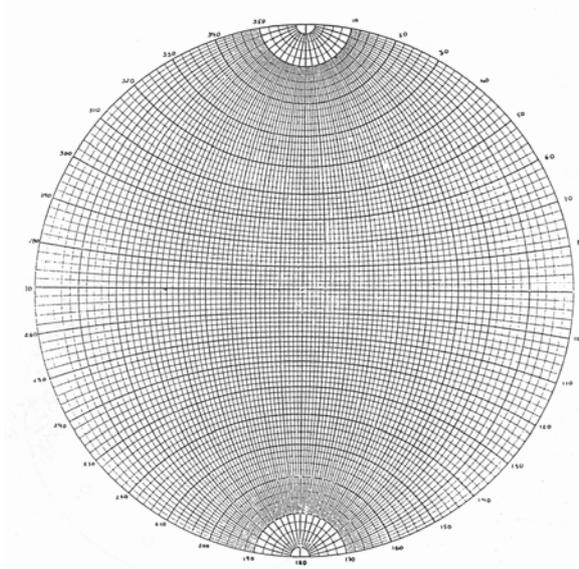


Figura 15 Proiezione dei piani nodali in funzione della loro inclinazione.

Secondo quanto si è visto fino ad ora, una frattura di taglio è equivalente a un sistema di due coppie di forze ortogonali senza momento risultante, conosciuto come doppia coppia. Questo sistema equivale a sua volta a un sistema di forze dipolari di pressione e di tensione situate sullo stesso piano, e dirette a 45° rispetto alle forze delle due coppie. Pertanto, sulla sfera focale si possono definire i seguenti sistemi di assi (fig. 16):

- *XYZ*: sistema degli assi delle forze della doppia coppia. *X* e *Y* sono anche i *poli* (direzioni normali) dei piani nodali *A* e *B* dell'onda *P*.

- *PTZ*: sistema degli assi principali dello sforzo: pressione, tensione e intermedio. L'asse *T* si trova sul piano *XY* a 45° dall'asse *X*, l'asse *P* a 45° dall'asse *Y* in verso opposto all'asse *X*.

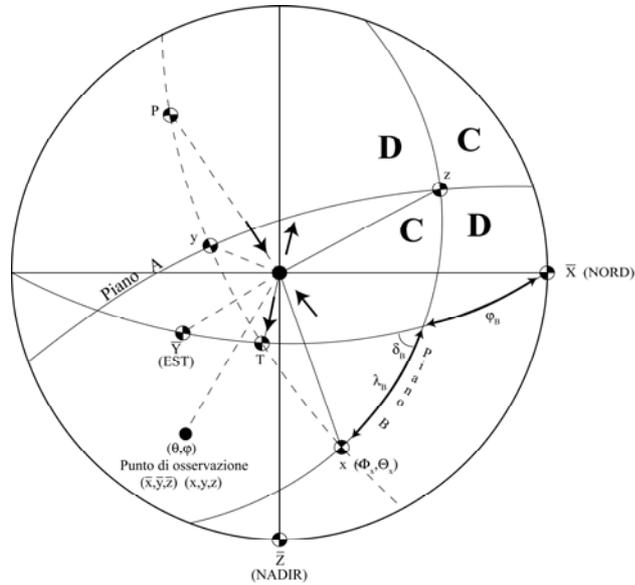


Figura 16 Rappresentazione di una doppia coppia sulla sfera focale.

Ciascuno dei tre assi dei sistemi ora visti viene definito mediante due angoli (o coordinate polari):

$$\begin{aligned}
 X &\equiv (\phi_X, \theta_X) & P &\equiv (\phi_P, \theta_P) \\
 Y &\equiv (\phi_Y, \theta_Y) & T &\equiv (\phi_T, \theta_T) \\
 Z &\equiv (\phi_Z, \theta_Z) & Z &\equiv (\phi_Z, \theta_Z)
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

I coseni direttori di questi assi riferiti al sistema di coordinate in cui x_1 coincide con il nord geografico, x_2 coincide con l'est geografico e x_3 coincide con la verticale orientata verso il basso sono:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \text{sen}\theta_i \cos\phi_i \\
 \beta_i &= \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi_i \\
 \gamma_i &= \cos\theta_i
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

con $i = X, Y, Z, T, P$.

Per l'ortogonalità dei tre assi di ciascun sistema, per ogni coppia presa a caso possono scriversi relazioni del tipo:

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0 \quad ,
 \tag{4.23}$$

che riducono da sei a tre gli angoli indipendenti. Per la stessa ragione, i coseni direttori di un qualunque asse di una terna possono essere individuati a partire da quelli degli altri due.

Le relazioni tra gli angoli che definiscono l'orientazione dei piani (ϕ_s, δ e λ) e quelli che definiscono il sistema di forze *XYZ* sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\phi_A &= \phi_X + 90^\circ \\
\delta_A &= \theta_X \\
\lambda_A &= \text{sen}^{-1}(\cos \theta_Y / \text{sen} \theta_X) \\
\phi_B &= \phi_Y + 90^\circ \\
\delta_B &= \theta_Y \\
\lambda_B &= \text{sen}^{-1}(\cos \theta_X / \text{sen} \theta_Y) .
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Così, se si conosce l'orientazione degli assi XYZ o PTZ è immediato ottenere quella del piano di faglia e del piano ausiliario e, viceversa, conosciuta l'orientazione dei due piani, si può ricavare quella degli sforzi.

4.5 Determinazione del meccanismo focale

Un problema tradizionale della Sismologia è quello della determinazione dei parametri caratterizzanti una sorgente sismica di frattura a partire dalle osservazioni sismografiche effettuate presso un conveniente numero di stazioni circostanti. In teoria è possibile, disponendo di un insieme di registrazioni degli spostamenti elastici (4.11) prodotti dal terremoto, e tenendo conto delle disomogeneità della Terra¹⁵, risalire alla completa rappresentazione del tensore $M_{ij}(\tau)$ che ha prodotto tali spostamenti. In pratica, spesso ci si accontenta di informazioni limitate, come la variazione netta del tensore $M_{ij}(\infty) - M_{ij}(0)$ nell'arco dell'intero processo di frattura. Questo, per una frattura di taglio, equivale alla determinazione dei parametri della faglia ϕ_s , δ e λ e del momento sismico scalare $M_0(\infty) - M_0(0)$. Spesso questi ultimi due problemi vengono trattati separatamente.

La determinazione dei parametri di una faglia che si è mossa liberando energia elastica durante un terremoto è sovente basata soltanto sull'osservazione dell'ampiezza dei primi impulsi (P o S) rilevati sui sismogrammi, o, più comunemente, soltanto sulla polarità dei primi impulsi registrati delle onde P . Ciò, pur a scapito della quantità di informazione utilizzata, offre il vantaggio di poter trascurare le complicazioni introdotte dall'attenuazione delle onde nel mezzo attraversato e dalla risposta delle apparecchiature sismografiche. E' bene tener presente che in questo caso il meccanismo determinato, specie in caso di un grande evento sismico, riguarda soltanto quel tratto della faglia che ha liberato l'energia elastica giunta per prima alle stazioni sismografiche, che potrebbe differire dal meccanismo del movimento di faglia in altre sue parti o nel suo complesso. Questo problema appare tanto più grande quanto più alta è la frequenza delle onde registrate dai sismografi (e tanto più corta è la loro lunghezza rispetto alle dimensioni della frattura). Un risultato univoco si raggiunge utilizzando le frequenze più basse dello spettro della radiazione emessa dalla sorgente, che corrispondono a lunghezze d'onda molto maggiori delle dimensioni della faglia. In questo modo si ricava un meccanismo medio, che è abitualmente denominato il *centroid moment tensor* (CMT).

4.5.1 Soluzione grafica

Come si è già visto nella sezione 4.3, un modello di frattura di taglio genera una funzione di radiazione per l'onda P caratterizzata da quattro quadranti con segno alternativamente di compressione (C) e di dilatazione (D). Il movimento di compressione è quello in cui lo spostamento si verifica nel verso che va dal punto focale al punto di osservazione, il movimento di dilatazione è quello nel verso contrario. Di conseguenza, un movimento di compressione registrato su una componente verticale avviene verso l'alto, e in una componente orizzontale avviene in direzione opposta all'epicentro. Al contrario, una dilatazione su una componente verticale corrisponde a un movimento verso il basso, e in una componente orizzontale a un movimento verso l'epicentro.

¹⁵ Tra queste disomogeneità va tenuta presente in primo luogo la discontinuità terra-aria.

Il metodo grafico consiste, una volta ricondotte le osservazioni della polarità del primo impulso dell'onda P alla superficie della sfera focale, nel riportarle su una sua proiezione sul piano orizzontale. Si utilizzeranno simboli diversi per le compressioni e per le dilatazioni (fig. 17). Dato che, scelto il punto di proiezione, soltanto un emisfero viene proiettato all'interno del cerchio sul piano di proiezione, le osservazioni relative all'altro emisfero debbono essere ricondotte al primo tenendo conto della simmetria del problema. In pratica, si inverte l'azimut della stazione di 180° e si considera il complemento a 180° dell'angolo di incidenza. Per terremoti registrati a distanze telesismiche, tutte le osservazioni si trovano situate nell'emisfero inferiore, e resta naturale usare questa rappresentazione. Per terremoti locali, con stazioni molto ravvicinate all'epicentro, parte corrisponderanno a raggi diretti verso il basso (onde rifratte) e parte a raggi diretti verso il basso (onde dirette). In questo caso si deve decidere quale emisfero usare, tenendo conto di quale tipo di osservazioni risulta predominante.

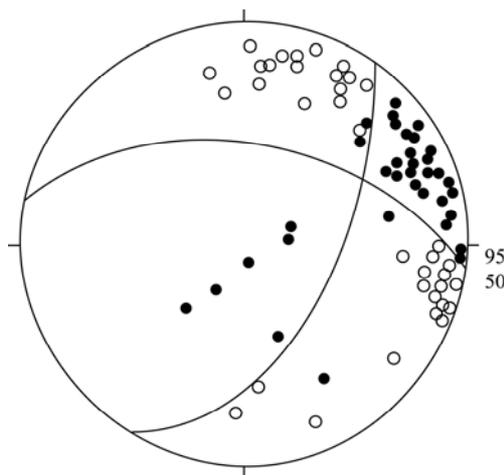


Figura 17 Proiezione sul piano orizzontale delle osservazioni di polarità alla superficie della sfera focale.

Una volta rappresentate le osservazioni sulla proiezione della sfera focale, si devono separare le compressioni e le dilatazioni mediante due piani ortogonali. Nella proiezione questo si realizza in forma grafica tracciando (con l'aiuto del reticolo di Wulff di fig. 15) uno dei due piani e localizzando il suo polo. Il secondo piano, per l'ortogonalità col primo, deve passare per detto polo. Situati i due poli dei piani (assi X e Y) si fa passare su di essi un cerchio massimo, e su quest'ultimo, a 45° dagli assi X e Y , si collocano gli assi T e P , in modo che l'asse T si trovi nel quadrante delle compressioni e l'asse P in quello delle dilatazioni. l'asse Z viene dato dall'intersezione dei due piani.

Dal diagramma si determinano facilmente gli angoli (ϕ , θ) degli assi X , Y , Z , T , P e gli angoli dei piani A e B . Comunque, tra i due piani tracciati non è possibile distinguere quale di essi sia il piano di faglia e quale l'ausiliario, dovendo ricorrere per questo ad altro tipo di considerazioni, come quelle di tipo geologico, la distribuzione delle repliche, e analisi sismologiche basate sullo studio dell'ampiezza delle onde di volume e di quelle superficiali.

4.5.2 Soluzione analitica

Un metodo di soluzione dei parametri di un modello di frattura prevede l'uso di una funzione che esprima la probabilità che i dati osservati corrispondano a quelli dedotti dal modello teorico (*funzione di merito*). Questa funzione dipenderà tanto dai dati osservati quanto dai parametri del modello di sorgente (ϕ , δ , λ). Il problema consiste nel cercare quei valori dei parametri che massimizzano la funzione di merito. Nel caso dell'osservazione delle sole polarità dei primi impulsi dell'onda P , possiamo considerare corrette le polarità (negative o positive) che concordano con quelle previste per ogni singola stazione dal modello vero di sorgente. Pertanto in questo caso una formulazione semplice della funzione di merito da massimizzare può essere:

$$p = \frac{\text{numero di osservazioni corrette}}{\text{numero totale di osservazioni}} \quad (4.25)$$

La (4.25) si calcola, tramite le (4.19), a partire dalle ampiezze teoriche A_i in ciascuna stazione per una determinata orientazione della faglia:

$$\text{numero di osservazioni corrette} = \sum_i \frac{1}{2} [1 + (A_i Y_i) / |A_i|] \quad (4.26)$$

dove $Y_i = 1$ in caso di compressione e $Y_i = -1$ in caso di dilatazione.

Valori di p compresi tra 0.5 (osservazioni completamente casuali) e 1 (osservazioni totalmente corrette) corrispondono a differenti casi di affidabilità delle soluzioni. La ricerca dell'insieme di parametri (ϕ_s, δ, λ) che rendono massimo il valore di p si può fare, per esempio, suddividendo il *range* di variabilità di ciascun parametro in un conveniente numero di intervalli e calcolando il valore di p su ciascun punto della griglia tridimensionale così ottenuta. Nella pratica si possono avere le seguenti situazioni:

- nessun insieme di parametri consente di avere tutte le osservazioni concordi con i dati teorici; ciò si può verificare per inadeguatezza del modello, o per errore di lettura dovuto a rumore di fondo, o per inversione accidentale di polarità nei sismografi; in questo caso tutte le soluzioni che realizzano il massimo valore di p (ovvero il minor numero di polarità incongruenti col modello) sono ugualmente accettabili;
- esistono infiniti insiemi di parametri che si accordano con le osservazioni; in questo caso tutte le soluzioni che rendono $p = 1$ sono da accettare.

Se, oltre alle polarità, sono disponibili anche i dati sulle ampiezze del movimento del terreno dei primi impulsi delle onde P , è possibile utilizzare queste ultime per il calcolo del meccanismo focale. A questo fine si cercherà l'insieme di parametri che rende minima la funzione errore:

$$E = \sum_i \left(A_i - A_i^* \right)^2 \quad (4.27)$$

dove A_i^* è l'ampiezza osservata alla stazione i -esima. Questo è un tipico problema di inversione risolvibile con il metodo dei minimi quadrati o con il metodo dell'esplorazione sulla griglia visto per le polarità.

4.6 Rappresentazione di diversi tipi di faglie

Posto che il meccanismo di un terremoto possa essere modellato da un movimento di faglia, i diversi tipi di questi movimenti daranno origine a rappresentazioni distinte nella loro proiezione della sfera focale. Oggi è generalizzato l'uso della rappresentazione dei meccanismi mediante la proiezione della sfera focale con i quadranti colorati in nero per le compressioni e in bianco per le dilatazioni. Le faglie sono comunemente distinte nelle seguenti classi:

- Faglia *trascorrente* (*strike slip*). La dislocazione ha direzione orizzontale; queste faglie sono tipiche delle zone di grande scorrimento orizzontale (San Andreas, Azorre-Gibilterra, Anatolia, Nuova Zelanda).
- Faglia *inversa*. La dislocazione avviene lungo la massima inclinazione (*immersione*) in verso tale da portare la parte superiore (tetto o *hanging wall*) ancora più in alto rispetto alla parte inferiore (letto o *foot wall*); queste faglie vengono causate da pressione orizzontale. Esse sono proprie delle zone di compressione (zone di subduzione e collisione di placche, archi del Pacifico, Ande). Quando l'angolo di inclinazione è particolarmente piccolo, queste faglie ricevono il nome di sovrascorrimenti (*thrust*).

- Faglia *diretta* o *normale*. La dislocazione avviene nella stessa direzione, ma con verso opposto a quello del caso precedente; queste faglie costituiscono la risposta della crosta terrestre a tensioni orizzontali e sono tipiche di zone dove predomina un regime di tensione (zone di *rift*) come nelle dorsali oceaniche e nell'Appennino.
- Faglia *verticale* (*dip slip*). E' un caso limite dei due precedenti, in cui l'inclinazione assume il valore di 90° , e non ha più senso distinguere il meccanismo normale da quello inverso.

Generalmente le faglie che si riscontrano in natura sono una combinazione dei tipi ora descritti e si parla di faglie con predominanza di componente trascorrente o normale e inversa, ossia dislocazione prevalentemente nel senso dell'immersione o della direzione. In figura 18 sono rappresentati i quattro tipi di faglia e i corrispondenti diagrammi del meccanismo focale. Sono state disegnate le proiezioni stereografiche dell'emisfero inferiore della stessa sfera focale.

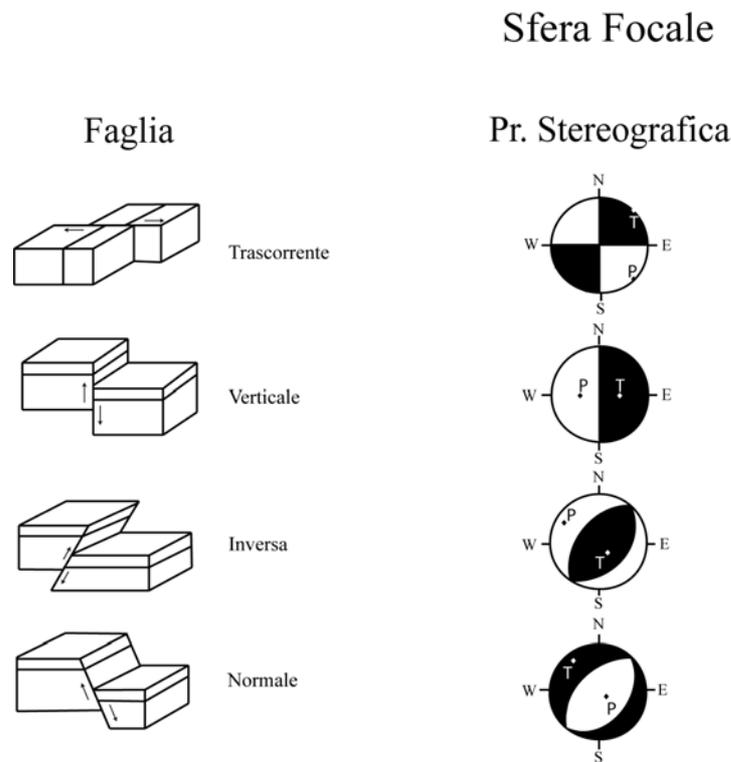


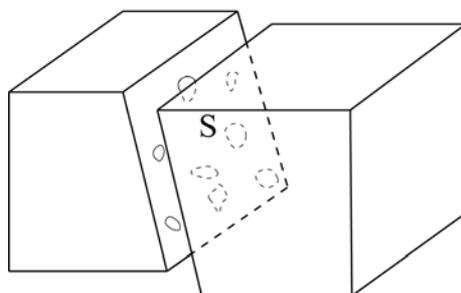
Figura 18 Faglie e corrispondenti diagrammi del meccanismo focale.

4.7 Implicazioni tettoniche del rilascio di momento sismico

Si ipotizzi di poter misurare il momento sismico statico (o scalare) $M_0^{(k)}$ di una serie sufficientemente lunga di terremoti verificatisi su una ben precisa zona di contatto fra due zolle o placche litosferiche. Ciascuno di tali terremoti può essere immaginato come una frattura che disloca una superficie di area $S^{(k)}$, appartenente all'intera superficie di faglia S che separa le due placche (fig. 19). Se la dislocazione ha mediamente la stessa direzione per tutti i terremoti (come deve essere se il movimento di una placca rispetto all'altra avviene in maniera approssimativamente uniforme) si potrà scrivere:

$$\sum_k M_0^{(k)} = \mu \sum_k \Delta u^{(k)} S^{(k)} = \mu \overline{\Delta u} S \quad . \quad (4.28)$$

Brune (1968)



$$\sum_{(i)K}^{(N)} M_0^{(K)} = \mu S \Delta \bar{u}$$

Figura 19 Rappresentazione di uno scorrimento fra due placche tramite un'unica faglia.

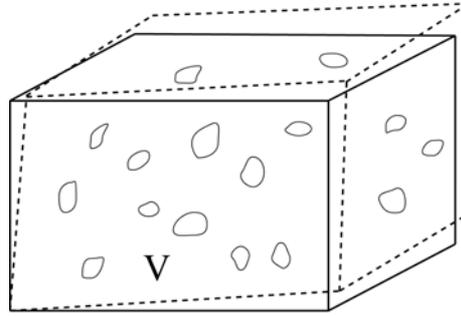
La (4.28), dovuta a Brune (1968), consente di ricavare la dislocazione totale media $\overline{\Delta u}$ sulla zona di contatto di due placche conoscendo l'area totale S della superficie di contatto (rilevabile dalla distribuzione spaziale degli eventi sismici in lunghezza e profondità), la rigidità del mezzo (legata alla densità e alla velocità delle onde S) e misurando il momento sismico degli eventi. L'entità della dislocazione $\overline{\Delta u}$, divisa per il tempo di osservazione dà la velocità media con cui una placca si muove rispetto all'altra lungo la zona di contatto.

La stima ora vista è indipendente dalle misure ottenibili direttamente dalle osservazioni geodetiche. L'assunzione che tutta la dislocazione sia associata a movimenti sismici può portare a stime per difetto della velocità di dislocazione laddove, invece, parte dei movimenti si verificano per movimenti lenti asismici di scorrimento su larghi tratti della faglia (come avviene più tipicamente nelle zone più profonde e più calde della crosta).

Il modello ora visto, che trova la sua migliore applicazione nello scorrimento che avviene in California tra la placca del Pacifico e quella nord-americana, non si adatta, invece, ai movimenti collegati ai terremoti in molte aree europee o asiatiche. Per tali aree è stato proposto il "flusso sismico" di masse litosferiche in cui le dislocazioni che avvengono in singoli terremoti su numerose fratture distribuite a caso su grandi volumi (fig. 20) si sommano macroscopicamente in un processo di deformazione quasi plastico. In questa visione, i terremoti contribuiscono, e fanno parte del processo di deformazione.

Per descrivere questo processo, si deve considerare un volume contenente un elevato numero di sorgenti sismiche come elementi di un mezzo continuo, e la nostra scala di tempi deve essere misurata in periodi molto più lunghi dell'intervallo di tempo medio fra due terremoti. Mentre i terremoti di dimensioni più grandi di un certo livello possono essere descritti soltanto come una frattura del mezzo, tutti quelli più piccoli possono essere pensati in termini di deformazione media del mezzo come se fossero "spalmati" su tutto il volume interessato.

Kostrov (1974)



$$\sum_1^N M_{0ij}^{(k)} = 2\mu V e_{ij}$$

Figura 20 Rappresentazione di una deformazione litosferica tramite “flusso sismico”.

Si consideri ora un elemento di litosfera nel quale, durante il tempo di osservazione Δt , avviene un numero N abbastanza grande di terremoti caratterizzati rispettivamente da aree di frattura $\Sigma^{(k)}$ e momenti sismici statici $M_{0ij}^{(k)}$, con $k = 1, \dots, N$. Per semplicità si ipotizzi che il volume elementare considerato abbia forma di parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi del sistema di riferimento, di lunghezza l_1 , l_2 e l_3 . Immaginando di identificare nel volume un elemento cilindrico con asse parallelo all'asse x_1 , si consideri lo spostamento relativo delle sue basi. Trascurando l'eventuale deformazione continua all'interno del corpo, lo spostamento cercato è dato dalla somma di tutte le dislocazioni avvenute sulle superfici di frattura che intersecano il cilindro elementare. Tale spostamento, che potrà essere scomposto su ciascuna delle tre direzioni i dello spazio, cumula quindi a

$$\Delta_1 u_i = \sum_k \Delta u_i^{(k)} \quad (4.29)$$

dove l'indice 1 sta a indicare che la somma viene fatta su tutte le superfici di frattura che intersecano il cilindro lungo la direzione dell'asse l_1 . Lo spostamento medio relativo delle due basi del parallelepipedo perpendicolari all'asse l_1 è pertanto:

$$\overline{\Delta_1 u_i} = [1/(l_2 l_3)] \sum_k \int_{\Sigma^{(k)}} \Delta u_i^{(k)} dS_1, \quad (4.30)$$

dove dS_1 è la superficie della base del cilindro elementare, al cui posto possiamo scrivere la proiezione, sul piano perpendicolare a l_1 , dell'elemento di superficie $d\Sigma^{(k)}$, avente per normale il versore \mathbf{n} orientato arbitrariamente, ottenendo:

$$\overline{\Delta_1 u_i} = [1/(l_2 l_3)] \sum_k \int_{\Sigma^{(k)}} \Delta u_i^{(k)} n_1^{(k)} d\Sigma^{(k)}. \quad (4.31)$$

La divisione per l_1 fornisce:

$$\overline{\Delta_1 u_i} / \Delta x_1 = (1/\Delta V) \sum_k \int_{\Sigma^{(k)}} \Delta u_i^{(k)} n_1^{(k)} d\Sigma^{(k)}, \quad (4.32)$$

dove $\Delta V = l_1 l_2 l_3$ e $\Delta x_1 = l_1$.

Ripetendo il ragionamento per le altre due direzioni l_2 e l_3 , si ottiene l'espressione per il generico lato l_j :

$$\overline{\Delta_j u_i / \Delta x_j} = (1/\Delta V) \Sigma_k \int_{\Sigma^{(k)}} \Delta u_i^{(k)} n_j^{(k)} d\Sigma^{(k)} \quad , \quad (4.33)$$

I rapporti fra differenze finite, trattando volumi elementari, possono essere immaginati in maniera approssimativa come derivate parziali delle relative funzioni ottenendo:

$$\overline{\partial u_i / \partial x_j} = (1/\Delta V) \Sigma_k \int_{\Sigma^{(k)}} \Delta u_i^{(k)} n_j^{(k)} d\Sigma^{(k)} \quad . \quad (4.34)$$

Ricordando la definizione della deformazione $e_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, si può scrivere:

$$\overline{e_{ij}} = (1/\Delta V) \Sigma_k 1/2 \int_{\Sigma^{(k)}} (\Delta u_i^{(k)} n_j^{(k)} + \Delta u_j^{(k)} n_i^{(k)}) d\Sigma^{(k)} \quad . \quad (4.35)$$

Ogni termine sotto il segno di integrale della (4.35) è il momento sismico statico della k -esima sorgente diviso per 2μ . Pertanto:

$$\overline{e_{ij}} = [1/(2\mu\Delta V)] \Sigma_k M_{0ij}^k \quad . \quad (4.36)$$

Supponendo che, nel volume considerato, i meccanismi focali rispettino la proprietà di avere gli assi principali del tensore del momento orientati in maniera costante (assunzione plausibile in una struttura sismogenetica omogenea), si può usare una particolare espressione del tensore del momento sismico e scrivere la (4.36) come:

$$e_{ij} = [1/(2\mu\Delta V)] (P_i P_j - T_i T_j) \Sigma_k M_0^{(k)} \quad , \quad (4.37)$$

dove $M_0^{(k)}$ è il momento sismico (statico) scalare del k -esimo terremoto e P_i e T_i sono le componenti degli assi principali medi (rispettivamente di massima pressione e di massima tensione) dei meccanismi focali dell'area sismogenetica considerata. La (4.37) è dunque una generalizzazione, dovuta a Kostrov (1974), della (4.28) valida per eventi distribuiti casualmente in una struttura tridimensionale. Con essa si può ricavare il tensore della deformazione media del volume sismogenetico a partire dalla misura del momento sismico di una serie sufficientemente lunga di terremoti e dalla conoscenza delle direzioni degli assi principali dello sforzo tettonico nella zona.

Bibliografia

Udias, A., 1999. *Principles of seismology*, Cambridge University Press

Aki, K., Richards, P.G., 1980. *Quantitative Seismology*, Vol.1 and 2, W.H. Freeman, San Francisco

Boschi, E. e Dragoni, M., 2000. *Sismologia*, UTET, Torino

Lay, T., Wallace, T., 1995. *Modern Global Seismology*, Academic Press, San Diego

Kostrov B.V., 1974, *Seismic moment and energy of earthquakes and seismic flow of rock*. Izv. Acad. Sci. USSR, Phys. Solid Earth, 1, 23-40.

Coordinamento editoriale e impaginazione

Centro Editoriale Nazionale | INGV

Progetto grafico e redazionale

Laboratorio Grafica e Immagini | INGV Roma

© 2008 INGV Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

Via di Vigna Murata, 605

00143 Roma

Tel. +39 06518601 Fax +39 065041181

<http://www.ingv.it>



Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia