

m

Miscellanea

INGV

Da Maxwell alle lenti: come ricavare le leggi dell'ottica geometrica partendo dalle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo

05



Direttore

Enzo Boschi

Editorial Board

Raffaele Azzaro (CT)

Sara Barsotti (PI)

Mario Castellano (NA)

Viviana Castelli (BO)

Anna Grazia Chiodetti (AC)

Rosa Anna Corsaro (CT)

Luigi Cucci (RM1)

Mauro Di Vito (NA)

Marcello Liotta (PA)

Lucia Margheriti (CNT)

Simona Masina (BO)

Nicola Pagliuca (RM1)

Salvatore Stramondo (CNT)

Andrea Tertulliani - coordinatore (RM1)

Aldo Winkler (RM2)

Gaetano Zonno (MI)

Segreteria di Redazione

Francesca Di Stefano - coordinatore

Tel. +39 06 51860068

Fax +39 06 36915617

Rossella Celi

Tel. +39 06 51860055

Fax +39 06 36915617

redazionecen@ingv.it

m

Miscellanea

INGV

**DA MAXWELL ALLE LENTI: COME RICAVARE LE LEGGI DELL'OTTICA
GEOMETRICA PARTENDO DALLE LEGGI FONDAMENTALI
DELL'ELETTROMAGNETISMO**

Umberto Sciacca

INGV (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Sezione Roma 1)



INDICE

Introduzione	5
1. Richiami di teoremi del calcolo vettoriale	6
2. Richiami delle equazioni fondamentali	7
3. Semplificazione delle equazioni fondamentali	8
4. Propagazione per onde	9
5. Energia del campo elettromagnetico – Vettore di Poynting	10
6. Onde piane	11
7. Analisi spettrale – Onda monocromatica	13
8. Rappresentazione con esponenziali complessi	15
9. Caso dei mezzi conduttivi	16
10. Comportamento alla superficie di discontinuità tra due mezzi: impostazione	17
11. Discontinuità tra due mezzi: variazione delle componenti dei campi	18
12. Discontinuità tra due mezzi: deduzione delle leggi dell'ottica	19
13. Discontinuità tra due mezzi: considerazioni energetiche	20
14. Estensione dell'uso degli esponenziali complessi	23
15. Approssimazione per l'ottica geometrica	23
16. Derivazione dell'equazione dei raggi ottici	25
17. Principio di Fermat	26
18. Derivazione delle leggi dell'ottica dal principio di Fermat	28
19. Limiti di validità dell'ottica geometrica	29
20. Conclusioni	30
Bibliografia	31

Introduzione

L'ottica geometrica è la più antica e meglio conosciuta branca dell'ottica; essa fornisce una descrizione dei fenomeni ottici soddisfacente per moltissime applicazioni usuali, che spaziano dai microscopi ai telescopi, fino ai semplici occhiali che molti portano per correggere difetti visivi. Le leggi alla base dell'ottica geometrica sono ben note, non solo a coloro i quali hanno affrontato studi universitari di tipo fisico e matematico, ma anche agli studenti delle scuole superiori; esse, nonostante l'ampiezza del campo applicativo, sono in fondo semplici, troppo semplici, tanto che a prima vista risulta sorprendente come sia possibile giungere ad una tale semplificazione. Infatti la descrizione delle onde elettromagnetiche, a cui si riconducono tutti i fenomeni luminosi, in generale deve fare uso delle equazioni di Maxwell, le quali sono senz'altro un mirabile ed elegante prodotto dell'intelligenza umana, ma la cui soluzione non si può certo dire che sia alla portata di tutti, soprattutto se si ha la pretesa di voler risolvere problemi di elettromagnetismo non particolarmente semplici.

Ora, a tutti coloro che svolgono studi di fisica a livello universitario viene detto che le leggi dell'ottica geometrica derivano dalle equazioni di Maxwell, sotto opportune condizioni. Peraltro ben difficilmente i passaggi concettuali che portano dalle seconde alle prime sono descritti esplicitamente nel dettaglio nell'ambito dei corsi di fisica dei bienni introduttivi ai corsi di laurea a carattere fisico – matematico. Spesso succede che, nell'ambito dei corsi successivi, vengano approfonditi aspetti applicativi dell'ottica geometrica, oppure altri aspetti relativi all'ottica ondulatoria, per cui rimane una lacuna relativa proprio al passaggio concettuale dalle equazioni di Maxwell alle leggi che consentono di descrivere il funzionamento delle lenti e di tutti gli altri dispositivi ottici usuali.

Il problema è che tale passaggio concettuale è di difficile reperibilità perfino nei testi a carattere specialistico, che pure contengono molte informazioni rilevanti per lo studio dell'ottica geometrica (come ad esempio [Persico 1932]). Uno dei testi più completi sull'ottica è [Born e Wolf 1959]; esso in effetti contiene una descrizione della derivazione delle leggi dell'ottica geometrica, la quale però ha il “difetto” (se di difetto si può parlare) di essere contenuta all'interno di un testo molto vasto, che descrive moltissimi altri argomenti, spesso anche notevolmente avanzati; inoltre il passaggio finale, quello che definisce il raggio ottico e le sue proprietà, viene parzialmente lasciato all'intuito del lettore. Ebbene, l'esigenza di riassumere l'argomento in modo chiaro e completo è alla base del discorso che viene portato avanti in questo lavoro.

In grandi linee questo lavoro può essere suddiviso in due parti. Nella prima vengono richiamate le equazioni di Maxwell, mettendo in evidenza come sia possibile ricavare l'esistenza delle onde elettromagnetiche e studiando in particolare le caratteristiche delle onde piane. Lo studio di queste ultime, pur se apparentemente molto diverse dalle onde tipiche dei fenomeni ottici, è invece fondamentale, alla luce di ciò che si andrà a vedere successivamente. Il contenuto di questa prima parte non è difficile da reperire in testi universitari, come [Sette 1967 e Sette 1969]; viene riportato non solo per comodità del lettore, ma anche per dare unità e coerenza al lavoro. Nella seconda parte (dal paragrafo 15 in poi) vengono analizzate le conseguenze dell'ipotesi alla base dell'approssimazione dell'ottica geometrica, cioè che la lunghezza d'onda sia molto piccola; si studierà peraltro in quali termini vada interpretata la locuzione “molto piccola” riferita alla lunghezza d'onda. Il discorso termina ricavando la definizione di raggio ottico e le leggi dell'ottica, passando per un richiamo al principio di Fermat.

L'argomento trattato è quindi molto concettuale e potrebbe sembrare avulso dai campi applicativi di interesse per l'INGV. In realtà l'approssimazione dell'ottica geometrica non è idonea a descrivere solo i fenomeni usuali, che trattano di specchi e lenti per onde della “banda visibile” (lunghezze d'onda nell'intervallo da circa 400 a circa 800 nm), ma è applicabile anche tutte le volte in cui la lunghezza d'onda è di gran lunga più piccola degli ostacoli con i quali le onde elettromagnetiche si trovano ad interagire. In effetti, le onde radio delle bande HF (ma anche MF e VHF), pur con lunghezze dell'ordine delle decine di metri, si possono considerare di lunghezza trascurabile quando incontrano la superficie terrestre o gli strati ionizzati ionosferici, i quali hanno dimensioni enormemente maggiori, se si trascurano le disuniformità che le caratterizzano (e queste ultime raramente sono dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda).

Ora, l'INGV sin dalla sua fondazione si è occupato della previsione delle condizioni di propagazione ionosferica, ma recentemente si sta interessando anche allo studio della geometria della propagazione, vale a dire il calcolo più accurato possibile della traiettoria che le onde radio (assimilabili a raggi ottici per quanto detto) percorrono nel loro viaggio nell'atmosfera, incontrando la ionosfera. Tale filone di studio ha già prodotto alcuni lavori (come [Bianchi e Bianchi 2009] e [Bianchi Sciacca Settini 2009]) e potrebbe svilupparsi ulteriormente. Il presente lavoro pertanto si inserisce all'interno di questo filone, del quale può

rappresentare il presupposto concettuale di base, dal quale prendere le mosse per approfondimenti, quali quelli contenuti nei lavori appena citati.

Il presente lavoro è stato scritto assumendo che il lettore posseda una certa confidenza con il calcolo vettoriale e l'analisi matematica; inoltre, pur potendo non essere esperto nel campo dell'elettromagnetismo, dovrebbe possedere un minimo di conoscenza di fisica a livello universitario. Per comodità è stato inserito un primo paragrafo contenente i richiami di calcolo vettoriale che possono essere utili per seguire la trattazione matematica successiva, che è stata condotta in maniera il più possibile completa, in modo da non saltare i passaggi intermedi e facilitare la lettura. Al contrario, si sono saltate tutte le dimostrazioni non funzionali al discorso principale, indirizzato alla determinazione delle proprietà dei raggi ottici.

1. Richiami di teoremi del calcolo vettoriale

Verranno prese in considerazione una o più grandezze, che potranno avere natura scalare, vettoriale o tensoriale. Quelle vettoriali saranno rappresentate o con una freccia sovrapposta al simbolo (ad esempio: \vec{E}) o con una sottolineatura (\underline{E}). Per i versori (vettori di intensità unitaria) si userà la stessa convenzione, solo che si farà in modo di usare sempre le lettere minuscole (es. \underline{s}). Le grandezze tensoriali saranno rappresentate con una doppia sottolineatura o soprilineatura (es. $\underline{\underline{g}}$).

Le grandezze scalari saranno del tipo: $f(\underline{r}) = f(x,y,z)$, avendo indicato con \underline{r} il vettore che identifica la posizione di un punto generico dello spazio cartesiano $P(x,y,z)$: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Invece le grandezze vettoriali saranno del tipo $\vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$, avendo indicato con \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} , i versori degli assi coordinati cartesiani.

Si fa uso del puntino (\cdot) e della crocetta (\times) per indicare rispettivamente il prodotto scalare e quello vettoriale tra due vettori. Ricordiamo che dati due vettori \underline{a} e \underline{b} , valgono le seguenti:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

(questa rappresentazione è usata perché molto comoda, ma rappresenta un abuso della notazione matriciale).

La seguente relazione definisce il modulo di un vettore \underline{a} ed un modo facile di calcolarlo, applicando la (1.1):

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}; \quad (1.3)$$

mentre la successiva esprime una importante proprietà del prodotto vettore, che discende direttamente dalla (1.2):

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0. \quad (1.4)$$

Si usa l'operatore Nabla (∇) per indicare in modo sintetico i principali operatori vettoriali differenziali:

$$\text{gradiente di uno scalare } f: \quad \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}; \quad (1.5)$$

$$\text{divergenza di un vettore } \underline{a}: \quad \nabla \cdot \vec{a}(x,y,z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (1.6)$$

$$\text{rotore di un vettore } \underline{a}: \quad \nabla \times \vec{a}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

laplaciano di uno scalare f :
$$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

laplaciano di un vettore \underline{a} :
$$\nabla^2 \underline{a}(x, y, z) = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \vec{k} \quad (1.9)$$

Per qualunque coppia di funzioni scalare f, g valgono le seguenti relazioni:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f; \quad (1.11)$$

per qualunque vettore \underline{a} valgono le seguenti:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{a}) = 0, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{a}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{a}) - \nabla^2 \underline{a}; \quad (1.13)$$

per una coppia di vettori $\underline{a}, \underline{b}$, vale la:

$$\nabla \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot \nabla \times \underline{a} - \underline{a} \cdot \nabla \times \underline{b}; \quad (1.14)$$

mentre per una terna di vettori $\underline{a}, \underline{b}$ e \underline{c} il triplo prodotto vettoriale ed il prodotto misto valgono:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b}), \quad (1.15)$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} \cdot (\underline{c} \times \underline{a}) = \underline{c} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}); \quad (1.16)$$

infine, dato un vettore \underline{a} ed una funzione scalare f , valgono le relazioni:

$$\nabla \cdot (f \underline{a}) = \nabla f \cdot \underline{a} + f \nabla \cdot \underline{a}, \quad (1.17)$$

$$\nabla \times (f \underline{a}) = \nabla f \times \underline{a} + f \nabla \times \underline{a}. \quad (1.18)$$

Teorema della divergenza. Il flusso di un vettore \underline{a} (cioè l'integrale su una superficie chiusa del prodotto scalare di \underline{a} per il versore \underline{u} normale alla superficie) è uguale all'integrale della divergenza del vettore, esteso al volume racchiuso dalla superficie:

$$\Phi(\underline{a}) = \int_S \underline{a} \cdot \underline{u} dS = \int_V \nabla \cdot \underline{a} d\tau \quad (1.19)$$

L'analogo per gli integrali di linea è il teorema di Stokes. L'integrale di circuitazione di un vettore \underline{a} (cioè l'integrale di \underline{a} lungo una linea chiusa C , del prodotto scalare del vettore per l'elemento infinitesimo della linea $d\vec{l}$) è uguale all'integrale, esteso ad una qualunque superficie che abbia C come contorno, del rotore del vettore moltiplicato scalarmene per la normale alla superficie:

$$\oint_C \underline{a} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \underline{a}) \cdot \underline{u} dS \quad (1.20)$$

Infine si ricorda un'importante proprietà del differenziale totale di una funzione scalare $f(x, y, z)$, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui i punti sono definiti dal vettore di posizione \underline{r} , assumendo che la variazione della funzione avvenga lungo una curva sulla quale è definita un'ascissa curvilinea s , tale che possa essere valida la: $d\vec{r} = \vec{s} ds$; il differenziale totale si può scrivere come segue:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\vec{r} = (\nabla f \cdot \vec{s}) ds. \quad (1.21)$$

2. Richiami delle equazioni fondamentali

Le grandezze fisiche che descrivono i campi elettromagnetici, ai quali vanno ricondotti i fenomeni luminosi, sono quelle elencate di seguito. Sono riportate anche le unità di misura e le dimensioni secondo quanto previsto dal Sistema Internazionale (SI). (Si usano le parentesi quadre quando si vuole mettere in evidenza che si esplicitano le dimensioni fisiche o le unità di misura di una grandezza.)

I campi elettromagnetici, da determinare in una certa regione dello spazio, sono:

\underline{E}	campo elettrico	$[E] = \text{V/m}$	$= \text{m}^1 \text{kg}^1 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
\underline{D}	induzione elettrica	$[D] = \text{C/m}^2 = \text{A} \cdot \text{s/m}^2$	$= \text{m}^{-2} \text{kg}^0 \text{s}^1 \text{A}^1$
\underline{B}	induzione magnetica	$[B] = \text{T} = \text{Wb/m}^2 = \text{V} \cdot \text{s/m}^2$	$= \text{m}^0 \text{kg}^1 \text{s}^{-2} \text{A}^{-1}$
\underline{H}	campo magnetico	$[H] = \text{A/m}$	$= \text{m}^{-1} \text{kg}^0 \text{s}^0 \text{A}^1$

esse sono tutte grandezze vettoriali.

Alcune grandezze sono “impresse”, cioè sono imposte dall'esterno:

\vec{j}	corrente di conduzione	$[\vec{j}] = \text{A/m}^2$	$= \text{m}^{-2} \text{kg}^0 \text{s}^0 \text{A}^1$
\vec{j}_m	corrente magnetica	$[\vec{j}_m] = \text{V/m}^2$	$= \text{m}^0 \text{kg}^1 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
ρ	carica elettrica	$[\rho] = \text{C/m}^3$	$= \text{m}^{-3} \text{kg}^0 \text{s}^1 \text{A}^1$
ρ_m	carica magnetica	$[\rho_m] = \text{Wb/m}^3$	$= \text{m}^{-1} \text{kg}^1 \text{s}^{-2} \text{A}^{-1}$

Le correnti sono densità per unità di superficie, e sono vettori, le cariche sono densità per unità di volume e sono scalari.

Infine, per determinare i campi bisogna conoscere le proprietà del mezzo, espresse dai seguenti parametri costitutivi, che in generale sono grandezze tensoriali:

$\underline{\epsilon}$	permittività elettrica	$[\epsilon] = \text{F/m}$	$= \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^4 \text{A}^2$
$\underline{\mu}$	permeabilità magnetica	$[\mu] = \text{H/m}$	$= \text{m}^1 \text{kg}^1 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$
$\underline{\sigma}$	conducibilità elettrica	$[\sigma] = \text{S/m}$	$= \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{A}^2$

Ogni volta che una grandezza si riferisce al vuoto si porrà un pedice zero, quindi, ad esempio, con ϵ_0 si indicherà la permittività elettrica del vuoto.

Ciò posto, le equazioni di Maxwell legano fra loro le grandezze introdotte sopra; esse in forma differenziale si scrivono come segue:

$$\text{(legge di Gauss elettrica)} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\text{(legge di Gauss magnetica)} \quad \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m, \quad (2.2)$$

$$\text{(legge di Faraday)} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}_m, \quad (2.3)$$

$$\text{(legge di Ampère)} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (2.4)$$

I vettori elettrici e magnetici non sono indipendenti, infatti sono legati dalle equazioni costitutive del mezzo:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.6)$$

Alle precedenti vanno aggiunte altre equazioni significative:

$$\text{(legge della continuità della carica)} \quad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\text{(legge di Ohm)} \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_m), \quad (2.8)$$

$$\text{(forza di Lorentz)} \quad d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (2.9)$$

l'ultima relazione esprime la forza agente su una carica infinitesima dq , immersa in un campo elettrico \underline{E} e magnetico \underline{B} , e muoventesi con velocità \underline{v} .

Le (2.8) e (2.9) sono ricavate sperimentalmente, mentre la (2.7) si può ricavare dalle equazioni di Maxwell nel modo seguente. Dalla (2.1) e (2.5), derivando rispetto al tempo, si ricava: $\epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$; invece, applicando l'operatore di divergenza alla (2.4), ricordando la (1.12), si ha: $\nabla \cdot \vec{j} + \epsilon \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$; infine, dato che è possibile invertire l'ordine di derivazione tra derivate spaziali e temporali, unendo i due risultati precedenti, si perviene alla (2.7).

3. Semplificazione delle equazioni fondamentali

Le leggi riportate nel paragrafo precedente sono le più generali possibili; tutte le grandezze che vi compaiono (in particolare i parametri costitutivi) sono $f(\vec{r}, t, \omega)$, cioè funzioni del punto dello spazio

definito dal vettore di posizione \underline{r} , del tempo t e della frequenza dei fenomeni (si è indicata la cosiddetta pulsazione ω , legata alla frequenza ν dalla semplice relazione: $\omega=2\pi\nu$). La soluzione matematica delle equazioni nel caso generale può diventare molto difficile, se non impossibile. Nei casi pratici però è possibile semplificare le relazioni generali, giungendo a relazioni più abordabili da risolvere, sia pure limitatamente all'ambito di validità delle ipotesi semplificative adottate.

Le ipotesi semplificatrici che saranno sempre adottate nel seguito sono le seguenti.

Nella (2.8) \underline{E}_m è il campo elettromotore, di tipo non conservativo, dovuto ai generatori di energia elettrica (trasformata a partire da altre forme di energia). In assenza di generatori si pone uguale a zero.

Le cariche e correnti magnetiche sono state introdotte per amore di simmetria, ma sono solo ipotetiche, non essendo state mai osservate, pertanto esse saranno poste uguali a zero.

Le grandezze costitutive in generale sono funzione del valore dei campi. Qualora tale dipendenza si possa trascurare, cosa che assumeremo d'ora in poi, si parla di mezzi lineari. Se anche la variazione con il tempo si può trascurare, cosa assunta d'ora in poi, si parla di mezzo tempo – invariante (o permanente).

La caratteristica tensoriale dei parametri costitutivi rende i mezzi anisotropi. Ciò significa che, anche a parità di altre condizioni, le caratteristiche dei campi elettromagnetici saranno diverse al cambiare della direzione dei vettori. D'ora in poi si considereranno solo mezzi isotropi, per i quali le relazioni costitutive si semplificano, infatti i parametri costitutivi collassano a semplici scalari.

Le seguenti ipotesi semplificatrici invece saranno adottate in alcuni casi, mentre in altri si ipotizzerà il caso generale.

La dipendenza funzionale dei parametri costitutivi dalla posizione significa che il mezzo non è omogeneo. Per lo più si considereranno mezzi omogenei, per i quali i parametri sono costanti.

La conducibilità diversa da zero porta a rapida attenuazione di tutti i fenomeni di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche nel mezzo (dissipazione per effetto Joule). D'ora in poi si considereranno solo mezzi in cui non siano presenti cariche, e quasi sempre anche non conduttivi, cosa che, per la legge di Ohm, porta ad assenza di correnti.

Considereremo infine mezzi senza spiccate proprietà magnetiche, tali che si possa considerare: $\mu=\mu_0$, cioè la permeabilità magnetica è costante e pari a quella del vuoto. In realtà considerare una μ differente non comporta complicazioni nei calcoli, perciò potrà essere preso in considerazione anche il caso generale $\mu=\mu(\omega)$.

Se si adottano tutte le ipotesi semplificatrici precedenti, tranne la conducibilità nulla, le equazioni generali si semplificano nelle seguenti:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (+\mu \vec{j}) \quad (3.4)$$

Notare come:

- bastano i due vettori \underline{E} e \underline{B} per descrivere il campo elettromagnetico, essi sono in genere $f(\vec{r}, t)$;
- il mezzo è descritto solo dal parametro $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ (e da $\mu(\omega)$, se non è pari a quella del vuoto);
- si può porre: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, esplicitando la permittività del vuoto (analogamente $\mu = \mu_0 \mu_r$),
- nella quarta relazione il termine $\mu \vec{j}$ è stato messo tra parentesi perché raramente capita di avere correnti di conduzione; se $\sigma=0$ anche $\vec{j}=0$; invece sarà sempre $\rho=0$.

La residua dipendenza di ε (e μ) dalla frequenza $\omega=2\pi\nu$ rende il mezzo dispersivo, cosa che avrà importanti conseguenze.

4. Propagazione per onde

Nell'ipotesi di validità delle (3.1)-(3.4) (mezzo omogeneo, non conduttivo, in generale dispersivo), dalla (3.3), applicando l'operatore rotore e la (1.13), ricordando la (3.1) si ricava:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}}_{=0 \nabla E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right);$$

invece dalla (3.4), derivata rispetto al tempo e invertendo l'ordine di derivazione delle derivate spaziali e temporali:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

infine, mettendo insieme i due risultati appena trovati:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

e si potrebbe ricavare in modo analogo: $\nabla^2 \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$.

Ora, le precedenti equazioni sono ben note in fisica perché descrivono la propagazione per onde. La teoria ci dice anche che la velocità di propagazione dell'onda è data dall'inverso del coefficiente posto davanti alla derivata temporale:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}; \quad (4.2)$$

introducendo la costante $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ (velocità della luce nel vuoto) e ricordando le definizioni di costanti relative, la precedente diventa:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}. \quad (4.3)$$

A giustificazione di ciò si può notare che se si considerano le dimensioni fisiche dei fattori che compaiono nelle equazioni delle onde, il fattore $\mu \varepsilon$ non può che avere le dimensioni di un inverso di una velocità al quadrato. Infatti, calcolando le dimensioni fisiche della (4.1), si ottiene:

$$\frac{[E^2]}{[L^2]} = [\mu \varepsilon] \frac{[E^2]}{[t^2]} \rightarrow [\mu \varepsilon] = \frac{[t^2]}{[L^2]} = \frac{1}{[v^2]}.$$

Che poi questa velocità sia proprio la velocità di propagazione dell'onda (e non qualche altro tipo di velocità) si potrebbe dimostrare rigorosamente, ma ciò esula dagli scopi di questi richiami.

Nel caso in cui $\mu = \mu_0$, si introduce un parametro chiamato indice di rifrazione assoluto del mezzo:

$$n(\vec{r}, \omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\vec{r}, \omega)}, \quad (4.4)$$

che consente di scrivere: $vn = c$ (costante). Tale parametro, che è una funzione scalare a valori reali (se $\sigma = 0$), sarà il solo usato per descrivere le proprietà del mezzo.

5. Energia del campo elettromagnetico – Vettore di Poynting

Sempre nelle ipotesi di validità delle (3.1)-(3.4) (mezzo omogeneo, in generale dispersivo), l'energia contenuta in un elemento di volume infinitesimo, qualora siano presenti correnti di conduzione \vec{j} , è proporzionale a $\vec{E} \cdot \vec{j}$; perciò, moltiplicando la (3.4) per \vec{E} , si ricava la seguente relazione energetica:

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}) - \vec{E} \cdot (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (5.1)$$

Se, come di solito accade, non vi sono correnti, la somma algebrica dei due termini a secondo membro deve essere nulla. In ogni caso il significato fisico di entrambi è quello di una potenza per unità di volume (W/m^3). La (1.14) può essere usata per esplicitare il primo termine:

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}) = \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \nabla \times \vec{E} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$$

Pertanto, inserendo quest'ultima nella (5.1):

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu}) = \vec{E} \cdot (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow -\frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \cdot (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow -\frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu});$$

ove si è indicato con $|\vec{E}|^2$ il prodotto $\underline{E} \cdot \underline{E}$. Integrando su un volume τ e applicando il teorema della divergenza (1.19) si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu}) d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau = \int_S \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} \cdot \vec{u} dS = \Phi(\vec{N}). \quad (5.2)$$

Il primo membro rappresenta la variazione dell'energia elettrica e magnetica contenuta nel volume τ . L'espressione implica che tale variazione coincide con il flusso, attraverso la superficie S che racchiude τ , del vettore, detto di Poynting:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (5.3)$$

che esprime l'energia che attraversa l'elemento di superficie infinitesimo, ha la direzione normale alla superficie e le dimensioni di una potenza per unità di superficie (W/m^2).

La (5.2) in realtà vale anche punto per punto: la derivata temporale e l'integrale sul volume si possono invertire di posizione e scrivere che:

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \frac{|\vec{B}|^2}{\mu}). \quad (5.4)$$

Tale equazione è l'analogo dell'equazione della continuità della carica (2.7); dice che la divergenza del vettore di Poynting, cioè la potenza che passa attraverso una superficie infinitesima che racchiude ogni punto dello spazio, è pari alla variazione dell'energia elettrica e magnetica contenute nel volume infinitesimo racchiuso dalla predetta superficie. Se, come accade nei casi stazionari, tale energia non varia nel tempo:

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = 0. \quad (5.5)$$

6. Onde piane

A questo punto è importante analizzare un caso particolarmente significativo, quello delle onde piane. Tale situazione si ha quando la propagazione avviene in modo che tutti i punti giacenti su un piano si trovino soggetti agli stessi valori dei campi \underline{E} e \underline{H} , in tutti gli istanti di tempo. Tali valori ovviamente possono evolvere nel tempo, e quelli rilevati su un certo piano ad un certo istante, possono essere ritrovati su un piano differente ad un altro istante, sostituiti sul primo piano da altri valori. La cosa essenziale è che, fissato un istante di tempo, non vi sia variazione del campo e. m. spostandosi sul piano. Il vettore di Poynting si suppone orientato in direzione normale al piano; si può pensare ad esempio che esso sia orientato come l'asse x e il piano di riferimento sia yz , o qualunque altro ad esso parallelo. La situazione delle onde piane è solo ideale, ma molto spesso situazioni reali possono essere ben approssimate, ad esempio un'onda sferica che si allontana da un punto ove essa è stata generata: a grande distanza dalla sorgente, i fronti d'onda sferici possono ritenersi ben approssimati dal piano tangente alla superficie. Anche se a prima vista può sembrare che le onde piane siano quanto di più lontano dai fenomeni tipici dell'ottica geometrica, procedendo con la trattazione vedremo invece che il loro studio risulterà molto utile.

Supporremo ancora valide le (3.1)-(3.4), quindi che il mezzo sia omogeneo e non conduttivo (la dispersione non è al momento significativa, perché per ora possiamo supporre che l'onda abbia un'unica frequenza fissata).

L'ipotesi di costanza sul piano yz implica che tutte le derivate rispetto a y e z si devono annullare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 & \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 & \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

ma sappiamo dalle (3.1) e (3.2) che le divergenze di \underline{E} e \underline{B} sono nulle, pertanto segue che:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0. \quad (6.2)$$

Riprendiamo ora le (3.3) e (3.4): le relazioni tra i rotori e le derivate temporali dei vettori possono essere esplicitate per ciascuna componente usando la (1.7). Per quella secondo x si trova, usando la (6.1):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_x}{\partial t} &= (\nabla \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &= (\nabla \times \vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

cioè le componenti secondo x di \underline{E} e \underline{B} non variano nel tempo; ma la (6.2) ci aveva rivelato che esse non variano nemmeno nello spazio, pertanto rappresentano un campo uniforme; tale campo non prende parte alla propagazione delle onde e, per semplicità, supporremo sempre nulle le sue componenti. In definitiva, esistono solo componenti di \underline{E} e \underline{B} giacenti sul piano (detto di polarizzazione), tale situazione implica che le onde sono trasversali (dette anche TEM, Trasversa Elettrica e Magnetica) rispetto alla direzione di propagazione. Ciò non sempre accade, potendosi verificare casi in cui esiste una componente di \underline{E} o \underline{B} nella direzione di propagazione, ma non si tratta di onde piane (es. onde TE o TM).

Ricapitolando quanto trovato finora, le uniche derivate spaziali che possono essere diverse da zero sono: $\frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x}, \frac{\partial B_z}{\partial x}$; esse potranno essere messe in relazione incrociata con le loro derivate temporali: $\frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}$. All'uopo calcoliamo le componenti dei rotori secondo y e z sempre usando le (3.3) e (3.4):

$$(\nabla \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (6.4)$$

$$(\nabla \times \vec{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$(\nabla \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (6.5)$$

$$(\nabla \times \vec{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Ora, data la trasversalità di \underline{E} e \underline{B} , si può supporre \underline{E} orientato come y semplificando i calcoli senza perdere in generalità. Ma allora, tenendo conto delle precedenti espressioni: $E_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$; pertanto anche la componente lungo y di \underline{B} è uniforme e la si può supporre nulla. Il vettore \underline{B} è dunque orientato lungo z ed è normale al vettore \underline{E} . In definitiva, dopo tutte le semplificazioni, rimangono solo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da esse, derivando la prima rispetto a x e sostituendo la seconda, oppure derivando la seconda rispetto a t e sostituendo la prima, si ottengono di nuovo le equazioni delle onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} &= \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

la cui soluzione generale è, indicando con f una funzione opportuna:

$$\begin{aligned} E_y &= f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ B_z &= \frac{1}{v} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove v la velocità di propagazione già incontrata nella (4.2) o (4.3).

Le due funzioni f_1 e f_2 rappresentano un'onda progressiva, che si propaga nel verso delle x crescenti, ed una regressiva, verso le x decrescenti. Tale soluzione matematica ha una giustificazione nel fatto che in generale è possibile avere onde nei due versi perché esse possono, incontrando una superficie di separazione con un mezzo diverso, essere riflesse e tornare indietro. In un mezzo illimitato tale eventualità non si verifica e si può porre $f_2=0$. Un orientamento diverso rispetto agli assi porterebbe ad una complicazione delle espressioni finali, ma le proprietà trovate non cambierebbero: i vettori E , B e Π formano una terna rettangola destrorsa (fig. 1).

Notare come il rapporto tra i moduli di \underline{E} e \underline{B} sia costante e pari a (per la sola onda progressiva):

$$\frac{E_y}{B_z} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} . \text{ È molto usato anche il rapporto:}$$

$$\frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = Z , \quad (6.9)$$

che ha le dimensioni di un'impedenza (misurata in ohm) ed è chiamata impedenza caratteristica del mezzo.

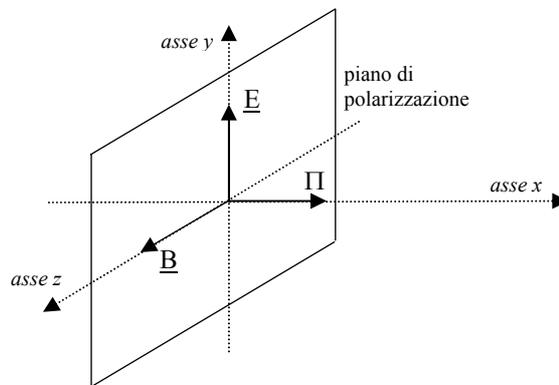


Figura 1

Posizione nello spazio dei vettori campo elettrico, induzione magnetica e di Poynting, per un'onda piana che si propaga nella direzione dell'asse x .

7. Analisi spettrale – Onda monocromatica

Finora non si sono fatte ipotesi particolari sulle funzioni $|E(t)|$ e $|B(t)|$, ottenute fissando un punto dello spazio. Esse in generale possono essere analizzate con l'analisi di Fourier e scomposte in varie componenti armoniche, se i fenomeni sono periodici, o, in caso contrario, in infinite componenti a frequenza diversa, ricavabili con la trasformata di Fourier. Si è detto all'inizio che i parametri caratteristici del mezzo sono in generale funzione della frequenza, in particolare ciò vale per la permittività elettrica $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$, visto che supponiamo che $\mu \cong \mu_0$. Questo ha per conseguenza che la velocità di propagazione è diversa per le diverse frequenze delle componenti armoniche che sommate danno l'andamento temporale dei campi. Ciò può osservarsi in maniera più evidente se il fenomeno ha un andamento nel tempo di tipo impulsivo.

L'analisi di Fourier dice che un impulso limitato nel tempo è costituito da molte (in teoria infinite) componenti a frequenza diversa e la forma dell'impulso è determinata dalle relazioni di ampiezza e di fase delle componenti; dato che però ciascuna componente viaggia a velocità diversa, le relazioni di fase tra le componenti variano mano a mano che il fenomeno si propaga, e la forma d'onda cambia. In particolare, l'impulso tende ad allungarsi nel tempo; questo è uno dei motivi per cui si parla di "dispersione" (un altro motivo è legato alla dispersione angolare di un raggio di luce che penetra in un prisma, quando esso è composto da varie componenti a diversa frequenza; fenomeno apparentemente molto diverso ma che ha la stessa causa, dato che la deviazione angolare è funzione dell'indice di rifrazione, a sua volta dipendente dalla frequenza).

Solo se il mezzo non è dispersivo (come si può assumere essere l'aria) la forma d'onda si mantiene uguale mano a mano che si propaga (con una velocità che è uguale per tutte le frequenze); in caso contrario,

perde di significato la velocità introdotta finora (detta “di fase”), pertanto, per definire la velocità di propagazione del fenomeno ondoso, si introduce una grandezza diversa, detta “velocità di gruppo” (v_g). Essa non fa riferimento alle singole componenti ma all’involuppo della forma d’onda, e si dimostra che essa è la velocità con cui si propaga l’energia. Nella fig. 2a è rappresentato schematicamente un impulso che si propaga senza dispersione: in alto è rappresentato l’andamento temporale osservato in un certo punto x_1 , in basso in un punto diverso x_2 ove l’impulso giunge dopo un tempo $t_2 - t_1$, tale che: $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_g$. Nella fig. 2b è rappresentato invece cosa succede se il mezzo è dispersivo, a parità di altre condizioni: l’impulso si “allunga” nel tempo, anche se la velocità di gruppo è la stessa (ma le velocità delle singole componenti sinusoidali sono differenti).

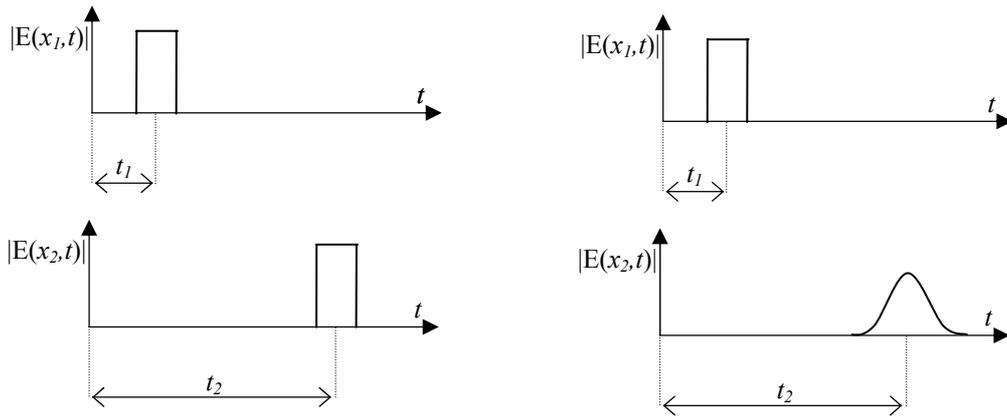


Fig. 2a: mezzo non dispersivo

Fig. 2b: mezzo dispersivo

Ulteriori approfondimenti di questo argomento esulano dai limiti di questa trattazione: noi d’ora in poi supporremo sempre di avere a che fare con onde monocromatiche, ma con l’avvertenza che la presenza di più componenti a frequenza diversa può portare a complicazioni in certe condizioni. Nel nostro caso dunque, il campo elettrico di un’onda piana, se si indica con T il periodo (la frequenza $\nu = 1/T$) e con E_0 il valore di picco della sinusoide che lo rappresenta, può essere rappresentato analiticamente come caso particolare della (6.8):

$$E_y(x, t) = E_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]; \quad (7.1)$$

periodo e lunghezza d’onda sono legate dalla: $\lambda = \nu T$ (o $\lambda \nu = v$). Spesso si preferisce introdurre il cosiddetto “numero d’onda” definito da $k = 2\pi/\lambda = \omega/\nu$; esso rappresenta l’analogo spaziale della pulsazione ω . Con tale introduzione, l’espressione precedente diviene:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin[(\omega t - kx)]. \quad (7.2)$$

Dato che in un mezzo diverso dal vuoto la lunghezza d’onda cambia, alle volte si esplicita il numero d’onda che compete al vuoto: $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$; introducendo contemporaneamente il termine che tiene conto delle proprietà del mezzo, l’indice di rifrazione n , si ottiene:

$$E_y(x, t) = E_0 \sin[(\omega t - k_0 n x)]. \quad (7.3)$$

Se la propagazione non avviene lungo l’asse x ma secondo una direzione generica individuata da un vettore \underline{s} , nel punto individuato dal vettore \underline{r} la precedente espressione può essere scritta nella sua forma più generale:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v}\right) - \psi_0\right], \quad (7.4)$$

ove si è introdotto anche un termine di fase costante ψ_0 per amore di generalità, ma esso spesso si può porre uguale a zero con opportuna scelta dell’origine dei tempi, se non sono implicati confronti con altre sinusoidi.

8. Rappresentazione con esponenziali complessi

L'uso delle funzioni seno (o coseno) rende i calcoli inutilmente complicati, mentre essi possono diventare più semplici adottando una notazione compatta che fa uso degli esponenziali con esponente immaginario. A tale scopo è utile usare la formula di Eulero: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$; essa suggerisce che, se si prende la parte reale dell'esponenziale, si ottiene una sinusoidale (analogamente per la parte immaginaria: la differenza tra seno e coseno è al momento poco significativa, dato che non vi sono confronti da fare sulle fasi). Allora l'andamento del campo, ad esempio quello elettrico, può essere rappresentato dalla espressione (i è l'unità immaginaria, da non confondere col versore \underline{i} dell'asse x ; $s = \vec{s} \cdot \vec{r}$ è la proiezione del vettore di posizione \underline{r} nella direzione di propagazione):

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i(\omega t - k_0 s)}; \quad (8.1)$$

per non confondere il vettore reale con quello complesso si è usata la tilde al posto della freccia. Da sottolineare che il vettore $\tilde{\vec{E}}$ così definito non ha un significato fisico diretto: per riottenere il vero vettore \underline{E} bisogna estrarre la sua parte reale. Si è lasciato dipendere \underline{E}_0 ancora da \underline{r} perché è possibile che la direzione del vettore vari da un punto all'altro; se interessa solo l'intensità $|\underline{E}_0|$ è da considerare costante.

Le espressioni generali che consentono di riottenere il campo elettrico e magnetico a partire dalle rappresentazioni complesse sono pertanto:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re[\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i(\omega t - ks)}] = \frac{1}{2}[\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i(\omega t - ks)} + \vec{E}_0^*(\vec{r})e^{i(\omega t - ks)}], \quad (8.2)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \Re[\vec{H}_0(\vec{r})e^{-i(\omega t - ks)}] = \frac{1}{2}[\vec{H}_0(\vec{r})e^{-i(\omega t - ks)} + \vec{H}_0^*(\vec{r})e^{i(\omega t - ks)}]. \quad (8.3)$$

La rappresentazione (8.1) è di portata abbastanza generale: si può applicare infatti a qualunque onda sinusoidale, anche se il mezzo non è omogeneo (basta considerare n funzione del punto) e dispersivo (basta considerare n funzione della frequenza). In realtà può essere applicata anche ai casi in cui il mezzo sia conduttivo, a patto di interpretare n in modo opportuno, come si vedrà più avanti.

Dato che nelle equazioni di Maxwell compaiono le derivate, esse vanno calcolate con la notazione esponenziale, trovando per il campo elettrico (per quello magnetico sono del tutto simili):

$$\frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega \tilde{\vec{E}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} = \omega^2 \tilde{\vec{E}}. \quad (8.4)$$

La derivata spaziale non è stata calcolata dato che porterebbe nel caso generale (mezzi non omogenei) ad un'espressione inutilmente complicata, mentre se vogliamo esprimere le equazioni di Maxwell che descrivono un'onda tramite gli esponenziali complessi, è sufficiente lasciare indicati gli operatori vettoriali che implicano derivate spaziali. Pertanto, in un mezzo non conduttivo ed isotropo in assenza di cariche e correnti (in generale non omogeneo), si ha:

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}_0 e^{ik_0 s}) = 0, \quad (8.5)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}_0 e^{ik_0 s}) = 0, \quad (8.6)$$

$$\nabla \times (\vec{E}_0 e^{ik_0 s}) = i\omega \mu \vec{H}_0 e^{ik_0 s}, \quad (8.7)$$

$$\nabla \times (\vec{H}_0 e^{ik_0 s}) = -i\omega \epsilon \vec{E}_0 e^{ik_0 s}. \quad (8.8)$$

Come si vede, gli esponenziali contenenti il tempo sono stati eliminati, essendo sempre diversi da zero e non essendo implicati nelle operazioni di divergenza e rotore.

Per finire calcoliamo l'espressione del vettore di Poynting facendo uso della rappresentazione con esponenziali complessi. L'espressione generale è la (5.3), nella quale dobbiamo inserire i valori dei campi \underline{E} e \underline{H} effettivi, variabili istante per istante, dati dalle (8.2) e (8.3).

Ciò che interessa non è tanto il valore istantaneo di N , quanto il suo valore medio; per calcolarlo bisogna prendere il valore medio su un periodo T (o un suo multiplo):

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int \vec{\Pi}(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int \frac{1}{4} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 e^{-2i(\omega t - ks)} + \vec{E}_0^* \times \vec{H}_0^* e^{2i(\omega t - ks)} + \vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{H}_0] dt. \quad (8.9)$$

Calcoliamo il primo termine sotto integrale in cui compare l'esponenziale:

$$\frac{\vec{E}_0 \times \vec{H}_0}{4T} \int_T [e^{-2i(\omega t - ks)}] dt = \frac{(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0) e^{2i(ks)}}{8i\omega T} [e^{-2i\omega t}]_T = 0, \quad (8.10)$$

ove le ultime parentesi quadre indicano il calcolo della primitiva agli estremi dell'intervallo T; ma dato che la funzione esponenziale è periodica (con periodo T/2), il suo valore in due istanti separati di un intervallo T è identico, motivo dell'annullarsi del termine.

La stessa cosa accade per il secondo termine sotto integrale (sempre contenente l'esponenziale ma con i vettori coniugati). In definitiva si trova:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int_T \vec{\Pi}(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int_T \frac{1}{4} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^* + \vec{E}_0^* \times \vec{H}_0] dt = \frac{1}{2T} \Re[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*] \cdot \int_T dt = \frac{1}{2} \Re[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*]. \quad (8.11)$$

Abbiamo portato avanti la notazione del coniugato (*) per tutti i vettori, in realtà essa non ha senso, essendo i vettori \vec{E}_0 e \vec{H}_0 reali, pertanto si può senz'altro scrivere:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\vec{E}_0 \times \vec{H}_0}{2}; \quad (8.12)$$

vale a dire che la potenza media portata dall'onda è proporzionale al prodotto dei valori di picco delle sinusoidi componenti; se poi l'onda è piana, e \vec{E} e \vec{H} sono perpendicolari, la potenza è proprio data dal semi-prodotto dei valori di picco.

9. Caso dei mezzi conduttivi

Volendo analizzare brevemente cosa succede se il mezzo è conduttivo, ci poniamo per semplicità in condizioni semplificate, pertanto consideriamo un mezzo omogeneo e un'onda piana che si propaga lungo l'asse x . Calcoliamo la derivata spaziale, in analogia a quanto fatto nella (8.4):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = ik_0 n \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -(k_0 n)^2 \vec{E} \quad (9.1)$$

Se il mezzo non è conduttivo, l'equazione delle onde $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, inserendo gli esponenziali complessi, si trasforma in:

$$k^2 = -\mu \varepsilon \omega^2 \rightarrow \tilde{k} = i\omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{i\omega}{v} = i\omega \sqrt{\mu \varepsilon_0} n. \quad (9.2)$$

Come si vede, ritorna un'espressione simile a quella già vista, solo che è messo in evidenza che k ha un valore immaginario (puro).

Se il mezzo è conduttivo, si deve ripercorrere tutto il procedimento che porta alla equazione delle onde, solo che quando si sostituisce il termine $\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, al secondo membro va aggiunto il termine:

$+\frac{\partial}{\partial t} \mu \sigma \vec{E}$. Sostituendo gli esponenziali complessi in maniera analoga alla precedente, si trova:

$$k^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + i\omega \mu \sigma \rightarrow \tilde{k} = \sqrt{-\omega^2 \mu} \cdot \sqrt{\varepsilon + \frac{i\omega \mu \sigma}{-\omega^2 \mu}} = i\omega \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{\varepsilon - i\sigma/\omega} \quad (9.3)$$

L'espressione differisce da quella trovata per il caso non conduttivo per la presenza del termine $-i\sigma/\omega$ da aggiungere a ε (evidentemente quando $\sigma \rightarrow 0$ torna uguale al caso precedente). Un modo di interpretare la cosa è pensare a ε (e quindi all'indice di rifrazione n) come una grandezza complessa. Mettendo in evidenza \tilde{n} e la sua natura complessa:

$$\tilde{k} = i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu} \cdot \sqrt{\varepsilon_r - i\sigma/\omega \varepsilon_0} = i\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu} \cdot \tilde{n}. \quad (9.4)$$

La conseguenza è che k , da immaginario puro che era, diventa dotato anche di una parte reale. Si potrebbe dimostrare che ciò ha come conseguenza che la sinusoidale che rappresenta l'andamento del campo non ha ampiezza costante, ma essa decresce mano a mano che l'onda si propaga nel mezzo; ciò è coerente

con il fatto che in un mezzo conduttivo la resistenza non infinita porta a dissipazione di energia per effetto Joule, energia che viene sottratta a quella portata dall'onda.

Il confronto tra i due termini ε e σ/ω porta ai due casi estremi: se il primo termine è molto maggiore del secondo, il mezzo tende a comportarsi come un dielettrico perfetto, con l'onda che si propaga senza attenuarsi (se è piana). Viceversa, mano a mano che il secondo termine diviene molto maggiore del primo, il mezzo tende a comportarsi come un conduttore perfetto, nel quale le onde si smorzano rapidamente; tuttavia, come si vedrà, ciò può avere delle conseguenze per la propagazione di un'onda, nel momento in cui incontra un conduttore ideale.

10. Comportamento alla superficie di discontinuità tra due mezzi: impostazione

Si consideri un'onda piana monocromatica (cioè costituita da una sola sinusoide di frequenza fissa ν) che si propaga in un mezzo lineare, permanente, isotropo, omogeneo e non conduttivo (ma dispersivo), caratterizzato dalle costanti (note) $\mu_1 \varepsilon_1$ (quindi velocità v_1) (vedi fig. 3). Si vuole determinare cosa succede quando essa incontra la superficie di separazione con un altro mezzo, dello stesso tipo, ma caratterizzato da diverse costanti (sempre note) $\mu_2 \varepsilon_2$ (quindi velocità v_2). Si suppone che detta superficie sia un piano coincidente col piano xy dello spazio e che l'onda provenga dal semispazio delle z positive, incidendo il piano nell'origine. Non si perde in generalità se si pensa l'onda incidente giacere nel piano xz ed in modo che il versore s formi un angolo ϑ con l'asse z . L'espressione del campo elettrico incidente è la (7.4), che riscriviamo per mettere in evidenza che la propagazione avviene nel mezzo 1 (l'origine dei tempi viene scelta in modo che $\psi_0=0$):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v_1}\right)\right]. \quad (10.1)$$

Ora, una parte dell'energia rimarrà nel mezzo 1, mentre un'altra passerà nel mezzo 2. In generale potrebbe essere possibile trovare cariche o correnti alla superficie di separazione, ma si tratta di casi particolari, che non interessano per le applicazioni che seguiranno, pertanto supporremo che esse siano nulle e che vi siano solo due onde originate da quella incidente: i vettori ad essi relativi avranno un apice se si riferiscono al mezzo 1, due apici se al mezzo 2 (vedi figura). L'espressione più generale che si può scrivere per esse è simile a quella per l'onda incidente:

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{\vec{s}' \cdot \vec{r}}{v_1}\right) - \psi'\right], \quad (10.2)$$

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \vec{E}''_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{\vec{s}'' \cdot \vec{r}}{v_2}\right) - \psi''\right]. \quad (10.3)$$

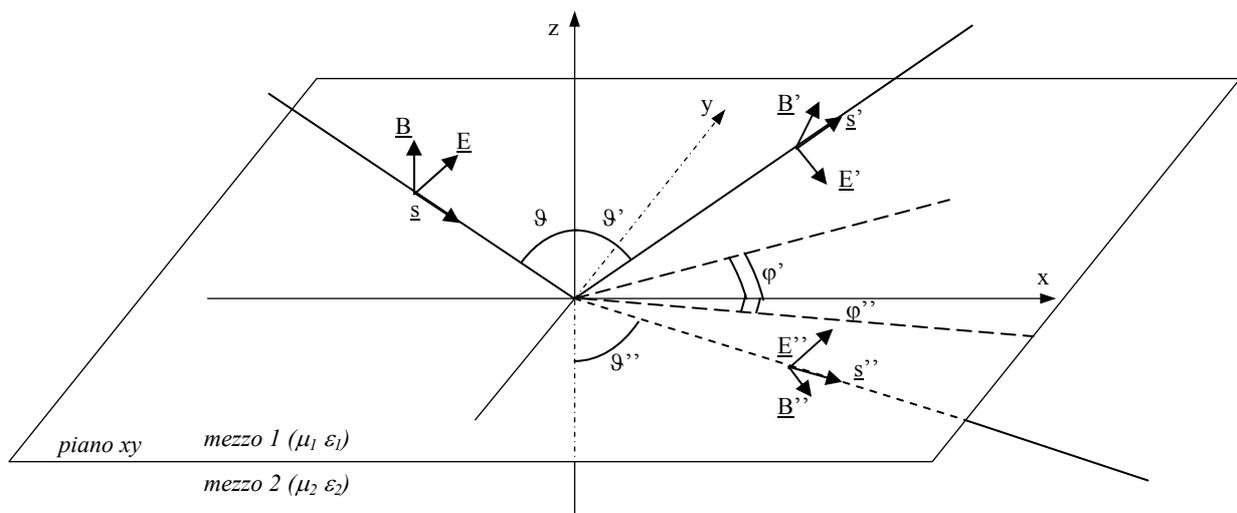


Figura 3: schematizzazione dei vettori alla superficie di separazione tra due mezzi

Ci poniamo nel caso più generale, supponendo di non sapere nulla su queste due onde, vale a dire che sono ignote e vanno determinate:

- le loro frequenze ω' ω'' ,
- le loro fasi ψ' ψ'' ,
- le ampiezze di picco E_0' E_0'' ,
- le direzioni dei versori \underline{s}' \underline{s}'' .

Conoscere i versori implica determinare gli angoli zenitali \mathcal{G}' \mathcal{G}'' e quelli azimutali φ' φ'' che i piani determinati dai versori e dall'asse z formano col piano xz , infatti, se si esprimono in funzione dei versori degli assi, si può scrivere:

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \sin \mathcal{G} \bar{i} - \cos \mathcal{G} \bar{k} \\ \bar{s}' &= \sin \mathcal{G}' \cos \varphi' \bar{i} + \sin \mathcal{G}' \sin \varphi' \bar{j} + \cos \mathcal{G}' \bar{k} \\ \bar{s}'' &= \sin \mathcal{G}'' \cos \varphi'' \bar{i} + \sin \mathcal{G}'' \sin \varphi'' \bar{j} - \cos \mathcal{G}'' \bar{k}\end{aligned}\quad (10.4)$$

11. Discontinuità tra due mezzi: variazione delle componenti dei campi

Per determinare le grandezze incognite, si parte ricordando cosa succede ai campi elettrici e magnetici alla superficie di separazione tra due mezzi diversi. Tali condizioni verranno ricavate considerando il caso statico, ma varranno anche in generale poiché devono valere istante per istante.

Dato che si considera un caso statico, nelle equazioni di Maxwell si possono assumere le derivate temporali sempre nulle, oltre che, come detto, non vi siano cariche e correnti libere sulla superficie di separazione (sono possibili cariche e correnti all'interno dei materiali, dato che non influenzano il ragionamento).

Consideriamo il vettore campo elettrico. Se si prende una linea chiusa rettangolare con due lati paralleli alla superficie di separazione e gli altri due perpendicolari, in modo che la attraversino (si veda la fig. 4, cui il piano del disegno è perpendicolare a quello della superficie di separazione, pertanto quest'ultimo appare solo come una retta, intersezione tra i due), la legge di Faraday nella forma (3.3) con l'ipotesi di staticità impone che il rotore di \underline{E} sia nullo; si può integrare tale rotore sulla superficie del rettangolo e il teorema di Stokes (1.20) ci assicura che tale integrale è uguale alla circuitazione di \underline{E} lungo i lati del rettangolo:

$$\oint_{ABCD} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_S (\nabla \times \bar{E}) \cdot \bar{n} dS = 0. \quad (11.1)$$

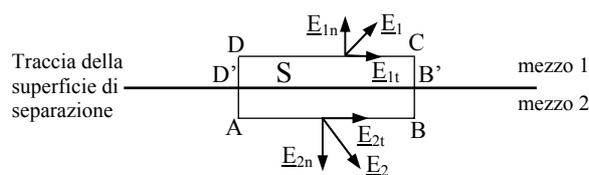


Figura 4: componenti del campo elettrico nell'intorno della superficie di separazione

Il vettore \underline{E} , che in generale ha un orientamento qualsiasi, può essere decomposto in una componente tangenziale (\underline{E}_t) ed una normale (\underline{E}_n), come indicato in figura; esse saranno in generale diverse dai due lati del dielettrico. Esplicitando l'integrale di circuitazione, si trova:

$$\begin{aligned}\int_A^B (\bar{E}_{2t} + \bar{E}_{2n}) \cdot d\bar{l} + \int_B^{B'} (\bar{E}_{2t} + \bar{E}_{2n}) \cdot d\bar{l} + \int_{B'}^C (\bar{E}_{1t} + \bar{E}_{1n}) \cdot d\bar{l} + \\ + \int_C^D (\bar{E}_{1t} + \bar{E}_{1n}) \cdot d\bar{l} + \int_D^D (\bar{E}_{1t} + \bar{E}_{1n}) \cdot d\bar{l} + \int_D^A (\bar{E}_{2t} + \bar{E}_{2n}) \cdot d\bar{l} = 0\end{aligned}$$

ricordando che i prodotti scalari sono nulli quando i vettori sono perpendicolari:

$$\int_A^B \bar{E}_{2t} \cdot d\bar{l} + \int_B^{B'} \bar{E}_{2n} \cdot d\bar{l} + \int_{B'}^C \bar{E}_{1n} \cdot d\bar{l} + \int_C^D \bar{E}_{1t} \cdot d\bar{l} + \int_D^A \bar{E}_{1n} \cdot d\bar{l} + \int_A^B \bar{E}_{2n} \cdot d\bar{l} = 0.$$

Ora, data la grandezza infinitesima del rettangolo, si può assumere senz'altro che i valori assunti dai campi sui lati BC e AD siano gli stessi (purché dalla stessa parte della superficie), pertanto il 2° e 6° integrale, sono uguali ed opposti (il senso di percorrenza è opposto); lo stesso dicasi per il 3° ed il 5°, quindi la somma si riduce a:

$$\int_A^B \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Infine, sempre a causa della lunghezza infinitesima del rettangolo, si può assumere che il valore del campo non vari percorrendo i segmenti AB e CD, pertanto gli integrali si riducono al prodotto del valore del campo per le lunghezze dei lati; essendo uguali (ma l'integrale ha segno opposto perché il lato è percorso in senso inverso), in definitiva si ha:

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad (11.2)$$

cioè sono conservate le componenti tangenziali dei vettori campi elettrici; non altrettanto si può dire per quelle normali.

Per il vettore induzione elettrica, si deve fare un discorso analogo, applicandolo però ad un cilindro con le basi parallele alla superficie di separazione (nella figura precedente AB e CD potrebbero essere interpretate come l'intersezione delle basi del cilindro col piano del disegno, mentre BC e DA come l'intersezione della superficie laterale).

Allora la legge di Gauss nella forma (3.1) impone che la divergenza di \underline{D} sia nulla, mentre il teorema della divergenza (1.19) assicura che l'integrale di tale divergenza sul volume occupato dal cilindro sia uguale all'integrale di \underline{D} sulla sua superficie, pertanto:

$$\int_{Scil} \underline{D} \cdot \underline{u} dS = \int_{Vcil} \nabla \cdot \underline{D} dV = 0, \quad (11.3)$$

ove \underline{u} è il versore normale alla superficie. Il discorso a questo punto è del tutto analogo al precedente, solo che ora ad annullarsi sulle basi del cilindro non sono le componenti normali del campo, ma quelle tangenziali, dato che risultano perpendicolari a \underline{u} . Il risultato è:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (11.4)$$

Tale risultato consente anche di calcolare la relazione che vige tra le componenti normali di \underline{E} , usando la relazione (2.5) (caso isotropo), che deve valere anche per le singole componenti del campo:

$$\epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_{r2} E_{2n}. \quad (11.5)$$

Consideriamo infine il campo magnetico. Le equazioni di Maxwell da applicare, nell'ipotesi posta che non vi siano correnti alla superficie di separazione, hanno la stessa forma di quelle viste per il campo elettrico, pertanto le conclusioni saranno le stesse, avendo cura di sostituire \underline{B} a \underline{D} e \underline{H} a \underline{E} , quindi:

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{1t} &= H_{2t} \\ \mu_{r1} H_{1n} &= \mu_{r2} H_{2n} \end{aligned} \quad (11.6)$$

12. Discontinuità tra due mezzi: deduzione delle leggi dell'ottica

Ritornando all'onda incidente sulla superficie di separazione, bisogna esprimere il fatto che le componenti tangenziali di \underline{E} e \underline{H} sono uguali sui due lati della superficie. Dette componenti tangenziali, giacenti sul piano xy , possono essere ulteriormente scomposte lungo x e lungo y , e la continuità vale per entrambe. Va tenuto presente, inoltre che i campi dell'onda incidente e di quella che torna indietro dalla stessa parte della discontinuità vanno sommate tra loro prima di essere uguagliate all'onda emergente dall'altra parte. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} E_x + E'_x &= E''_x & \frac{B_x}{\mu_1} + \frac{B'_x}{\mu_1} &= \frac{B''_x}{\mu_2} \\ E_y + E'_y &= E''_y & \frac{B_y}{\mu_1} + \frac{B'_y}{\mu_1} &= \frac{B''_y}{\mu_2} \end{aligned}$$

Queste ultime possono essere inserite nelle espressioni sinusoidali dei campi (10.1), (10.2) e (10.3), che devono essere rispettate in qualsiasi istante ed in qualsiasi punto con $z=0$. Questo è possibile solo se gli argomenti delle funzioni seno sono uguali (o differiscono per multipli di π), cioè:

$$\omega\left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v_1}\right) = \omega'\left(t - \frac{\vec{s}' \cdot \vec{r}}{v_1}\right) - \psi' = \omega''\left(t - \frac{\vec{s}'' \cdot \vec{r}}{v_2}\right) - \psi'', \quad (12.1)$$

ma ciò è possibile solo se:

$$\omega = \omega' = \omega'' \text{ e} \quad (12.2)$$

$$\psi' = m\pi \text{ e } \psi'' = q\pi \quad (m, q = 0, 1, 2, \dots); \quad (12.3)$$

in altri termini le frequenze sono identiche e le fasi o sono uguali o avviene un cambiamento di segno dell'ampiezza. Si deve avere inoltre per tutti i punti con $z=0$:

$$\frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v_1} = \frac{\vec{s}' \cdot \vec{r}}{v_1} = \frac{\vec{s}'' \cdot \vec{r}}{v_2}, \quad (12.4)$$

espressione compatta dalle molte conseguenze. Intanto, il fatto che \underline{s} abbia componente nulla lungo y implica che anche \underline{s}' e \underline{s}'' l'abbiano nulla, pertanto:

$$\varphi' = \varphi'' = 0. \quad (12.5)$$

Questa conseguenza corrisponde alla famosa legge dell'ottica secondo cui il raggio incidente, riflesso e rifratto giacciono nello stesso piano.

Utilizzando la (12.4) e le espressioni dei versori (10.4) le uguaglianze dei prodotti scalari divengono (per \underline{r} sul piano $z=0$ vale: $\vec{r}_{z=0} = x\vec{i} + y\vec{j}$):

$$\frac{x \sin \vartheta}{v_1} = \frac{x \sin \vartheta'}{v_1} = \frac{x \sin \vartheta''}{v_2}. \quad (12.6)$$

Dall'uguaglianza del primo e del secondo termine, si ha che:

$$\sin \vartheta = \sin \vartheta' \Rightarrow \vartheta = \vartheta', \quad (12.7)$$

che corrisponde alla legge della riflessione: raggio incidente e riflesso formano angoli uguali rispetto alla normale. Dall'uguaglianza tra primo e terzo termine invece si trova infine:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (12.8)$$

che esprime la legge di Snell - Cartesio sulla rifrazione. Nel caso in cui il mezzo 1 sia l'aria, l'indice di rifrazione è circa unitario, pertanto vale la: $\sin \vartheta'' = \frac{\sin \vartheta}{n_2}$.

I mezzi più usuali, come il vetro, hanno indice di rifrazione maggiore di uno, pertanto la direzione di propagazione passando dall'aria al vetro si avvicina alla normale (si allontana nel passaggio inverso). Da notare poi che, nel caso di passaggio dal vetro all'aria l'allontanamento dalla normale non può aumentare più quando ϑ diventa uguale a $\pi/2$, che corrisponde ad un angolo limite: $\sin(\vartheta'') = 1/n_2$. Aumentando ϑ'' oltre questo limite, l'equazione precedente ha soluzioni immaginarie: tutta l'energia viene riflessa nel mezzo 2 e si ha la riflessione totale.

I risultati trovati sembrano suggerire che le leggi dell'ottica siano identiche a quelle trovate nel caso attuale che ha preso in considerazione onde piane. Tale caso corrisponde ad una idealizzazione difficilmente riscontrabile nelle situazioni reali, anche se spesso è possibile avvicinarsi parecchio a tale condizione. L'ottica geometrica però fa uso del concetto di raggio ottico, che appare a prima vista ben diverso da quello di onda piana: il primo dovrebbe essere infinitamente sottile, mentre la seconda può sussistere solo se i fronti d'onda sono piani che si estendono all'infinito. Vedremo nel seguito come sia possibile chiarire questo apparente paradosso.

13. Discontinuità tra due mezzi: considerazioni energetiche

I parametri incogniti relativi all'onda incidente, riflessa e trasmessa nel secondo mezzo, sono stati trovati quasi tutti, tranne le relazioni tra le ampiezze. Tale studio è più complicato ed è riassunto dalle formule di Fresnel, che esprimono le ampiezze dell'onda riflessa e di quella trasmessa in funzione dell'ampiezza incidente.

Per effettuare lo studio conviene scomporre il vettore campo elettrico in una componente normale (pedice \perp) ed una tangenziale (pedice \parallel) al piano di incidenza (fig. 5). Si ricordi infatti che il campo elettrico (e quello magnetico) sono perpendicolari al vettore di Poynting, che identifica la direzione di propagazione, ma tale vincolo lascia libero il vettore di assumere qualunque orientamento rispetto al piano di incidenza; nel seguito chiameremo α l'angolo che il vettore forma con quest'ultimo. Qui non vengono riportati tutti i passaggi intermedi, non tanto per la difficoltà quanto perché sono lunghi e noiosi. Ci accontentiamo di riportare il risultato.

$$|E'_{\parallel}| = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta''}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta''} \cdot |E_{\parallel}| \quad \text{(riflessione)} \quad (13.1)$$

$$|E'_{\perp}| = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta''}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta''} \cdot |E_{\perp}|$$

$$|E''_{\parallel}| = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta''} \cdot |E_{\parallel}| \quad \text{(trasmissione)} \quad (13.2)$$

$$|E''_{\perp}| = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta''} \cdot |E_{\perp}|$$

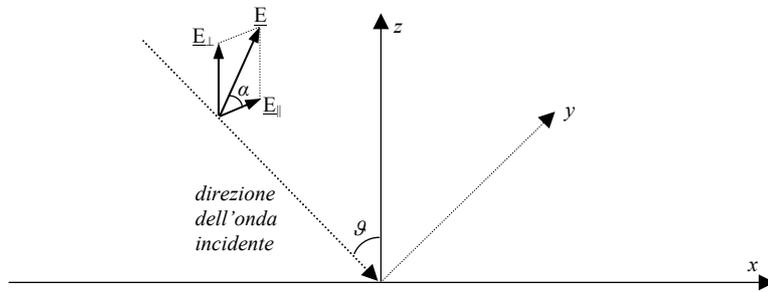


Figura 5: componenti normale e tangenziale

Esse, se l'incidenza è normale, portano (basta porre $\theta = \theta'' = 0$) a:

$$|E'_{\parallel}| = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \cdot |E_{\parallel}| = \frac{n_2 / n_1 - 1}{n_2 / n_1 + 1} \cdot |E_{\parallel}| \quad \text{(riflessione normale)} \quad (13.3)$$

$$|E'_{\perp}| = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \cdot |E_{\perp}| = -\frac{n_2 / n_1 - 1}{n_2 / n_1 + 1} \cdot |E_{\perp}|$$

$$|E''_{\parallel}| = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \cdot |E_{\parallel}| = \frac{2}{n_2 / n_1 + 1} \cdot |E_{\parallel}| \quad \text{(trasmissione normale)} \quad (13.4)$$

$$|E''_{\perp}| = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot |E_{\perp}| = \frac{2}{n_2 / n_1 + 1} \cdot |E_{\perp}|$$

Da queste formule è possibile ricavare le analoghe relazioni per le energie, che poi è quanto più interessa. Definendo un coefficiente di riflessione (cioè il rapporto tra i moduli del vettore di Poynting dell'onda riflessa e di quella incidente):

$$\mathcal{R} = \frac{|\Pi'|}{|\Pi|} = \frac{|E'|^2}{|E|^2}, \quad (13.5)$$

e di trasmissione (rapporto analogo, relativo all'onda trasmessa):

$$\mathcal{T} = \frac{|\Pi''|}{|\Pi|} = \frac{n_2 \cos \theta''}{n_1 \cos \theta} \cdot \frac{|E''|^2}{|E|^2}; \quad (13.6)$$

si ricava:

$$\mathcal{R} = \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \cdot \left[\frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2(\theta + \theta'')}{\cos^2(\theta - \theta'')} + \sin^2 \alpha \right] \quad (13.7)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\sin(2\theta)\sin(2\theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \cdot \left[\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2(\theta - \theta'')} + \sin^2 \alpha \right] \quad (13.8)$$

Si potrebbe verificare (anche ciò dopo calcoli non difficili, ma lunghi e noiosi) che è $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$, come è giusto, dato che la somma delle frazioni di energia riflessa e trasmessa deve essere unitaria. Nella realtà tale evento ideale non si verifica, perché vi è sempre una frazione dell'energia incidente che viene perduta per vari motivi: nel raggio trasmesso una parte dell'energia viene assorbita dal mezzo e trasformata in altra forma di energia, per quello riflesso hanno luogo fenomeni di riflessione non speculare (per "scattering").

Si può notare che nelle formule non compaiono esplicitamente gli indici di rifrazione, in realtà essi condizionano implicitamente i due coefficienti, dato che l'angolo \mathcal{G}'' dipende da \mathcal{G} tramite la legge di Snell. Pertanto la modalità secondo cui l'energia incidente si suddivide tra onda riflessa e trasmessa dipende dalle caratteristiche dei due mezzi, come era da attendersi; purtroppo però dipende anche dallo stesso angolo di incidenza \mathcal{G} . Tale fatto può essere sfruttato in vari modi, il più famoso dei quali consiste nel trovare l'angolo che consente di annullare la componente del campo elettrico riflesso che giace nel piano di incidenza. Si potrebbe dimostrare infatti che in corrispondenza del valore: $\mathcal{G}_b = \arctan(n_2/n_1)$ nell'onda riflessa il campo elettrico ha solo la componente normale al piano di incidenza; in pratica l'onda è polarizzata e l'angolo \mathcal{G}_b è chiamato angolo polarizzante di Brewster.

In generale però, data la variazione dei coefficienti con l'angolo \mathcal{G} , le formule trovate non sono molto significative; può però essere di qualche interesse la considerazione del caso particolare relativo all'incidenza normale. Allo scopo non è possibile porre $\mathcal{G}=0$ direttamente nelle espressioni dei coefficienti di riflessione (13.7) e (13.8) perché si otterrebbe una forma indeterminata; bisogna invece riprendere le formule di Fresnel relative al caso di incidenza normale (13.3) e (13.4), e rideterminare i coefficienti di riflessione e trasmissione, trovando (in questo caso perde di importanza la considerazione delle componenti normale e tangenziale, perciò basta considerarne solo una, il risultato è lo stesso):

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_2/n_1 - 1}{n_2/n_1 + 1} \right)^2 \quad (\text{riflessione normale}), \quad (13.9)$$

$$\mathcal{T} = \frac{4n_2/n_1}{(n_2/n_1 + 1)^2} \quad (\text{trasmissione normale}). \quad (13.10)$$

Sono molto interessanti due casi limite. Se il secondo mezzo è un metallo, o comunque un conduttore molto buono, il suo indice di rifrazione, come visto in precedenza, tende a diventare infinito (in modulo, dato che è complesso), ma allora in questo caso si può scrivere che: $\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \mathcal{R} = 1$ e che: $\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \mathcal{T} = 0$. I trattamenti volti a rendere uno specchio il più vicino possibile a questo caso ideale prevedono infatti di ricoprirlo con strati di materiale metallico; ora, dato che il termine da aggiungere a ε è σ/ω (vedi (9.3)) e, per le frequenze di interesse per l'ottica, ω è elevata, sarà più difficile rendere un piano perfettamente riflettente in ottica rispetto alle frequenze delle radio onde, tuttavia tali trattamenti hanno esiti soddisfacenti.

Ancora più interessante è cercare di rendere nulla la riflessione, avendosi in tal caso una "lente perfetta". Purtroppo ciò si potrebbe ottenere solo nel caso in cui i due mezzi abbiano indici di rifrazione molto simili; infatti si ha che in questo caso: $\lim_{n_2 \rightarrow n_1} \mathcal{R} = 0$ e che: $\lim_{n_2 \rightarrow n_1} \mathcal{T} = 1$ (cioè tutta l'energia passa nel secondo mezzo). Ora, i tipi di vetro con i quali si costruiscono le lenti hanno indici di rifrazione non modificabili e certamente difficili da rendere uguali a quello dell'aria. Si può pensare allora di interporre tra il primo mezzo (di indice n_1) ed il secondo (di indice n_2) un terzo mezzo (di indice n_3) e cercare sotto quali condizioni si ha un massimo per \mathcal{T} . I calcoli non sono difficili e non vengono riportati qui: il lettore interessato può riprendere la (13.10) e trovare il coefficiente di riflessione complessivo, risultante dal passaggio dal mezzo 1 al 3 e poi dal mezzo 3 al 2, cosa facile perché è il prodotto dei due. Quindi si calcola la derivata rispetto a n_3 (che è l'unica variabile, dato che si ipotizza di non poter variare n_1 e n_2) e si cerca il valore che la annulla, corrispondente ad un massimo per motivi fisici e matematici (per n_3 pari a zero o

infinito si ha un coefficiente nullo). Tale valore si trova che deve essere: $n_3 = \sqrt{n_1 n_2}$, cioè alla media geometrica dei due indici di rifrazione. Ora, questo risultato è stato ricavato nel caso particolarmente facile di incidenza normale, mentre nei casi pratici le onde potrebbero incidere sulle lenti secondo vari angoli; tuttavia esistono trattamenti antiriflesso che tendono ad avvicinare i casi reali al caso ideale.

14. Estensione dell'uso degli esponenziali complessi

Gli esponenziali complessi sono stati introdotti nel caso di un'onda sinusoidale (monocromatica) che si propaga in un mezzo omogeneo, tuttavia è possibile usare tale notazione e riscrivere l'espressione delle equazioni di Maxwell anche in casi più generali. Nella semplice relazione $k_0 n s$ che compariva all'esponente della (8.1) si teneva conto delle proprietà del mezzo con il semplice indice di rifrazione n . Per estendere la validità a casi più generali, in cui il mezzo non è omogeneo, al posto di ns va inserita ad esponente una funzione scalare del vettore di posizione \underline{r} , che chiameremo $S(\underline{r})$, da determinare a seconda dei casi; essa si chiama funzione iconale per motivi che saranno chiari più avanti. Pertanto si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ik_0 S(\vec{r})} \quad \text{e} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{ik_0 S(\vec{r})}. \quad (14.1)$$

La natura vettoriale di \underline{E} e \underline{H} è determinata da \underline{E}_0 e \underline{H}_0 ; da notare che essi mantengono una dipendenza dal vettore di posizione \underline{r} perché in generale la polarizzazione può cambiare da un punto all'altro dello spazio. Si noti che l'ipotesi introdotta, cioè che la propagazione sia influenzata solo dalla funzione $S(\underline{r})$, è comunque un'approssimazione, dato che implica implicitamente che i vettori \underline{E}_0 e \underline{H}_0 non dipendano dal tempo, pertanto l'ipotesi ha validità solo se essi non variano o lo fanno molto lentamente. Da notare infine che, in analogia a quanto accennato a proposito di n , il mezzo è ipotizzato non conduttivo e la funzione S è reale.

Le equazioni di Maxwell allora diventano (generalizzazione delle (8.5)-(8.8)):

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = 0, \quad (14.2)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = 0, \quad (14.3)$$

$$\nabla \times (\vec{E}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = i\omega \mu \vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})} = ik_0 c \mu \vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}, \quad (14.4)$$

$$\nabla \times (\vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = -i\omega \varepsilon \vec{E}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})} = -ik_0 c \varepsilon \vec{E}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}. \quad (14.5)$$

In esse i rotori e le divergenze vanno esplicitati usando le regole del calcolo vettoriale richiamate all'inizio. Per il vettore H si trova:

$$\nabla \times (\vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = (\nabla \times \vec{H}_0 + ik_0 \nabla S \times \vec{H}_0) e^{ik_0 S(\vec{r})}, \quad (14.6)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = \nabla \mu \cdot \vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})} + \mu \nabla \cdot (\vec{H}_0 e^{ik_0 S(\vec{r})}) = (\nabla \mu \cdot \vec{H}_0 + \mu \nabla \cdot \vec{H}_0 + ik_0 \mu \vec{H}_0 \cdot \nabla S) e^{ik_0 S(\vec{r})}. \quad (14.7)$$

Per il vettore E si trovano espressioni analoghe. Sostituendo queste ultime nelle equazioni di Maxwell, troviamo:

$$\vec{E}_0 \cdot \nabla S = \frac{1}{ik_0} (\vec{E}_0 \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \nabla \cdot \vec{E}_0), \quad (14.8)$$

$$\vec{H}_0 \cdot \nabla S = \frac{1}{ik_0} (\vec{H}_0 \cdot \frac{\nabla \mu}{\mu} + \nabla \cdot \vec{H}_0), \quad (14.9)$$

$$\nabla S \times \vec{E}_0 - c \mu \vec{H}_0 = \frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{E}_0, \quad (14.10)$$

$$\nabla S \times \vec{H}_0 + c \varepsilon \vec{E}_0 = \frac{1}{ik_0} \nabla \times \vec{H}_0. \quad (14.11)$$

15. Approssimazione per l'ottica geometrica

Il punto in cui siamo giunti alla fine del paragrafo precedente è cruciale: se infatti nelle (14.8)-(14.11) si ipotizza che le lunghezze d'onda siano piccole, cioè $\lambda \rightarrow 0$ allora si ha che $k_0 \rightarrow \infty$, i denominatori dei secondi membri di tutte e quattro le equazioni tendono all'infinito, pertanto tali membri si annullano. Otteniamo:

$$\vec{E}_0 \cdot \nabla S = 0, \quad (15.1)$$

$$\vec{H}_0 \cdot \nabla S = 0, \quad (15.2)$$

$$\nabla S \times \vec{E}_0 - c\mu \vec{H}_0 = 0, \quad (15.3)$$

$$\nabla S \times \vec{H}_0 + c\varepsilon \vec{E}_0 = 0. \quad (15.4)$$

Notare come le prime due si possono ricavare dalle altre. Ad esempio, se moltiplichiamo scalarmene la (15.3) per ∇S , il primo addendo va a zero (ricordando le (1.16) e (1.4): $\nabla S \cdot (\nabla S \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot (\nabla S \times \nabla S) = 0$); allora rimane solo il secondo addendo moltiplicato per ∇S , che altro non è che la (15.2). La stessa cosa accade per la (15.4) e la (15.1).

Ricavando H_0 dalla (15.3) e sostituendolo nella (15.4) otteniamo:

$$\nabla S \times \frac{\nabla S \times \vec{E}_0}{c\mu} + c\varepsilon \vec{E}_0 = 0; \quad (15.5)$$

essa contiene un triplo prodotto vettore, che in virtù della (1.15) si può scrivere come:

$$\nabla S \times \nabla S \times \vec{E}_0 = \nabla S (\nabla S \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\nabla S \cdot \nabla S) = -\vec{E}_0 |\nabla S|^2$$

ove il primo dei due termini si annulla per la (15.1). Ritornando alla (15.5) il campo \underline{E}_0 si semplifica e si ha:

$$|\nabla S|^2 = \mu\varepsilon c^2 = \frac{c^2}{v^2} = n^2(x, y, z). \quad (15.6)$$

Tale equazione si chiama equazione dell'iconale, dal nome della funzione S . Ricordando come è stata introdotta la funzione S (14.1), le superfici caratterizzate da $S(x, y, z)$ costante sono superfici equifase (pertanto concorrono a formare le immagini ottiche, circostanza che ha suggerito il nome "iconale"). La forma della (15.6) suggerisce che tra l'indice di rifrazione n e l'iconale S intercorra un rapporto simile a quello che vige tra il campo elettrico ed il potenziale ($\nabla V = -\vec{E}$); la differenza principale è che nel caso elettrico la relazione è vettoriale, mentre nel caso dell'iconale la relazione è scalare, quindi non definisce la direzione di ∇S , che va trovata usando opportunamente le condizioni al contorno.

Riprendendo le (8.11)-(8.12) che esprimono il vettore di Poynting medio, è possibile ora calcolarlo introducendo le espressioni che contengono l'iconale. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2} \Re[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*] = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] = \frac{1}{2c\mu} [\vec{E}_0 \times (\nabla S \times \vec{E}_0)] = (\text{per la (1.15)}) \\ &= \frac{1}{2c\mu} [\nabla S (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\vec{E}_0 \cdot \nabla S)] = (\text{per la (15.1)}) \\ &= \frac{\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0}{2c\mu} \nabla S = \frac{\varepsilon c}{2n^2} |\vec{E}_0|^2 \nabla S. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Tale risultato mostra che la potenza media dipende dal punto dello spazio, dato che nella (15.7) compaiono n , ε , $|\underline{E}_0|$ e ∇S , che sono tutte funzioni della posizione. Tuttavia la cosa più significativa non riguarda tanto l'intensità del vettore di Poynting, quanto la sua direzione, che è determinata unicamente dalla direzione di ∇S . Chiamiamo con \underline{s} il versore che individua la direzione sempre perpendicolare alle superfici $S=cost$, per la (15.6):

$$\vec{s} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\nabla S}{n}; \quad (15.8)$$

con questa posizione si ha che: $\frac{c}{n^2} \nabla S = \frac{c}{n^2} n \vec{s} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{s} = v \vec{s}$, quindi la (15.7) diviene:

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon}{2} |\vec{E}_0|^2 v \vec{s} = \langle \mathcal{E} \rangle v \vec{s}, \quad (15.9)$$

ove si è indicata con $\langle \mathcal{E} \rangle$ l'energia (media) per unità di volume. Quest'ultima espressione evidenzia che l'energia si muove alla velocità v ($v < c$) nella direzione di \underline{s} ; tale direzione, essendo quella di ∇S , è sempre normale alla superficie descritta dalla funzione di partenza S . Pertanto (vedi fig. 6) se $S=cost$ e $S'=S+dS$

sono due superfici iconali che descrivono due superfici equifase infinitamente vicine, l'energia fluirà dalla prima alla seconda in direzione ad esse normale.

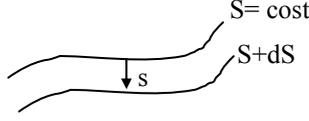


Figura 6: spostamento delle superfici a S costante

16. Derivazione dell'equazione dei raggi ottici

Dato un insieme di superfici $S=cost$, sarà definito anche l'insieme delle linee ad esse perpendicolari in ogni punto; ognuna di tali linee è tale da avere il versore \underline{s} sempre tangente ad essa. Consideriamo allora un "tubo di flusso" dell'energia costruito prendendo due areole di superficie, $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$, giacenti su due iconali come in fig. 6, e tutte le linee ad esse perpendicolari che partono dal contorno della prima e finiscono al contorno della seconda (fig. 7); sia $d\Sigma_L$ la superficie laterale del tubo e γ una generica linea che unisce le $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$.

L'energia contenuta nell'elemento di tubo di flusso ovviamente non può variare nel tempo, concetto già introdotto pervenendo alla (5.5). Si può applicare il teorema della divergenza al volume infinitesimo $d\tau$ compreso all'interno della superficie del tubo Σ , ottenendo (la normale in ogni punto è chiamata \underline{u}):

$$\int_{\Sigma} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma = \int_{d\Sigma_1} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma + \int_{d\Sigma_2} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma + \int_{d\Sigma_L} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma = \int_{d\tau} \nabla \cdot \langle \vec{\Pi} \rangle d\tau = \nabla \cdot \langle \vec{\Pi} \rangle d\tau = 0.$$

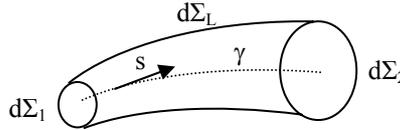


Figura 7: tubo di flusso

Dato che su $d\Sigma_L$ $\langle \vec{\Pi} \rangle$ è sempre normale a \underline{u} , tenendo conto del segno del prodotto scalare (opposto per le due $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$) la precedente equivale a (con $\underline{\Pi}_1$ e $\underline{\Pi}_2$ sono indicati i vettori di Poynting sulle $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$):

$$\int_{d\Sigma_1} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma = - \int_{d\Sigma_2} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \underline{u} d\Sigma \Rightarrow \left| \langle \vec{\Pi}_1 \rangle \right| d\Sigma_1 = \left| \langle \vec{\Pi}_2 \rangle \right| d\Sigma_2. \quad (16.1)$$

Essa non dice altro che l'energia non fluisce attraverso le superfici laterali del tubo di flusso, e che l'energia che entra da $d\Sigma_1$ è uguale a quella che esce da $d\Sigma_2$, pertanto la densità per unità di superficie è inversamente proporzionale all'area di $d\Sigma$.

Si definisce raggio ottico la linea sempre perpendicolare alle superfici iconali $S=cost$, la quale, per quanto appena visto definisce la direzione in cui scorre l'energia. Ora, dato che la (15.6) non definisce direttamente la direzione di ∇S (il versore \underline{s}) è opportuno disporre di un modo per ricavarla. Allo scopo si prenda la definizione (15.8) e si eseguano i passaggi sotto riportati.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(n\vec{s}) &= \frac{d}{ds}(\nabla S) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \vec{k} \right) = (\text{ricordando la (1.21) in cui la } f \text{ è la derivata di } S) \\ &= \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \vec{s} \right) \vec{i} + \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \vec{s} \right) \vec{j} + \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \vec{s} \right) \vec{k} = \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\nabla S}{n} \right) \vec{i} + \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{\nabla S}{n} \right) \vec{j} + \left(\nabla \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \frac{\nabla S}{n} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla S \cdot \nabla S \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla S \cdot \nabla S \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \nabla S \cdot \nabla S \right) \vec{k} \right] = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right) \vec{k} = \nabla n \end{aligned}$$

In definitiva si trova quella che è l'equazione del raggio:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{s}) = \nabla n. \quad (16.2)$$

Essa è un'equazione differenziale vettoriale, che si spezza in tre equazioni scalari in cui è data la $n(x,y,z)$ e bisogna trovare le tre componenti di \underline{s} per ogni punto dello spazio, cosa che equivale a trovare l'equazione del raggio come curva nello spazio, una volta imposte le condizioni al contorno, che poi altro non sono che stabilire il versore \underline{s} in un punto P_0 ove il raggio ha origine. Tale ragionamento è solo di principio, in quanto risolvere la (16.2) può essere difficile o impossibile, pertanto è necessario ricorrere a metodi numerici, a meno di non considerare casi particolarmente semplici.

Alle difficoltà di calcolo si uniscono anche problemi di natura generale: dati due punti, non è detto che esista sempre un raggio ottico che li unisce. Anche nel caso in cui un raggio esistesse, non è detto che esso sia unico, potendone esistere anche infiniti (si pensi ad esempio agli infiniti raggi che, uscendo da un punto di un oggetto, vengono fatti convergere da una lente in un altro punto, corrispondente all'immagine del primo, quando essa è reale). Per fortuna si può dimostrare (ma noi non riportiamo qui la dimostrazione) che nell'intorno di un qualunque punto P, il raggio ottico esiste ed è unico.

Se $n=const. \Rightarrow \nabla n=0$, ma ciò, in base alla (16.2), significa che:

$$\frac{d}{ds}(n\vec{s}) = \frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = 0 \Rightarrow n \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \vec{r}(s) = s\vec{\zeta} + \vec{\eta}, \quad (16.3)$$

con $\vec{\zeta}, \vec{\eta}$ vettori costanti; in pratica l'espressione per $\underline{r}(s)$ è l'equazione parametrica di una retta. In definitiva: in una zona di spazio in cui n è costante i raggi ottici sono rettilinei e le superfici iconali sono piani.

Data la (15.8), scritta come $\nabla n = n\underline{s}$, applicando l'operatore rotore, si ottiene (si ricordi la (1.10)):

$$\nabla \times (n\vec{s}) = \nabla \times (\nabla S) = 0; \quad (16.4)$$

quindi è possibile applicare il teorema di Stokes (1.20) ad una qualunque curva chiusa C , bordo di una superficie Σ per la quale è definita la normale orientata \underline{u} :

$$\oint_C n\vec{s} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\nabla \times n\vec{s}) \cdot \underline{u} d\Sigma = 0. \quad (16.5)$$

Quest'ultima relazione suggerisce un parallelo tra campo elettrostatico in assenza di cariche e campo scalare n : in entrambi i casi si tratta di campi conservativi, pertanto l'integrale calcolato lungo un percorso tra due punti non dipende dal percorso ma solo dal valore assunto dal "potenziale" S agli estremi (fig.8):

$$\int_{A\gamma_1}^B n\vec{s} \cdot d\vec{r} = \int_{A'\gamma_2}^{B'} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = S_2 - S_1 \text{ se } S(B) = S(B') = S_2 \text{ e } S(A) = S(A') = S_1; \quad (16.6)$$

mentre invece:

$$\int_A^{A'} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = \int_B^{B'} n\vec{s} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (16.7)$$

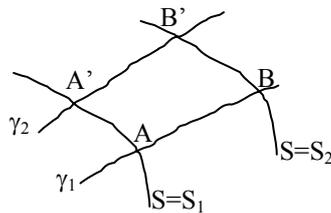


Figura 8: invarianza dell'integrale di linea di $n_s \cdot dr$

17. Principio di Fermat

Dalle considerazioni teoriche svolte è possibile una semplice giustificazione del famoso principio di Fermat, assunto come "principio", appunto, nel XVII secolo. Esso si basa sul concetto di cammino ottico: dati due punti A e B, se per essi passa un raggio ottico γ , si definisce cammino ottico l'integrale (chiamando n l'indice di rifrazione, funzione del punto dello spazio, Δt il tempo che la luce impiega per percorrere la curva γ):

$$\int_{\gamma} n ds = \int_{\gamma} \frac{c}{v} ds = c \Delta t ; \quad (17.1)$$

si noti che il cammino ottico può essere interpretato come la distanza che la luce percorrerebbe nel vuoto nello stesso tempo Δt impiegato per percorrere il tratto di curva γ . Ebbene, il principio di Fermat, afferma che il cammino ottico associato ad un raggio corrisponde ad un cosiddetto “punto critico”; esso nei casi pratici è quasi sempre un minimo, vale a dire che, se si prova ad imporre una variazione locale al raggio, il valore del cammino ottico associato alla nuova traiettoria tende ad aumentare.

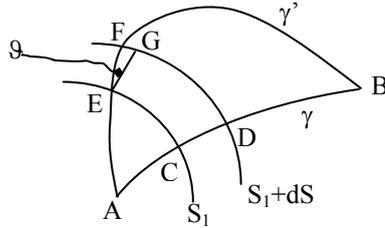


Figura 9: giustificazione del principio di Fermat

Con riferimento alla fig.9, la traiettoria γ tra i punti A e B è un raggio ottico, mentre la curva γ' è un'altra curva ottenuta variando la prima localmente. Quest'ultima circostanza è essenziale, in quanto il principio di Fermat nulla dice riguardo a variazioni “in grande”: si è visto infatti che sono possibili più raggi che uniscono due punti, ai quali possono essere associati in generale cammini ottici differenti. Ebbene, si deve dimostrare che il cammino ottico associato a γ' è sempre superiore a quello effettivo, relativo a γ . Nella fig.9 sono state segnate due tracce relative a due superfici iconali S_1 e S_1+dS , infinitamente vicine; i punti C e D sono le intersezioni delle due iconali con γ , mentre E e F sono le analoghe relative alla γ' ; il segmento EG invece è normale a S_1 in E. Si noti che il valore di $n(x,y,z)$ è in generale diverso su γ e γ' ; tuttavia passando da C a D, o da E a F o a G esso può essere assunto costante, dato che si rimane nell'intorno di un punto (C o E rispettivamente). Ebbene, si calcoli il valore della funzione integranda della (17.1), tenendo conto delle (16.6) e (16.7); si può scrivere che (per ora non facciamo ipotesi su n)

$$(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{EF} = (n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{EG} + \underbrace{(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{GF}}_{=0} = (n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{EG}, \quad (17.2)$$

ma il secondo membro non è altro che ds (su EG), mentre il primo può essere espresso in funzione dell'angolo ϑ formato tra \underline{s} (sempre normale all'iconale) e $d\underline{r}$ (sempre tangente alla curva):

$$(nds \cos \vartheta)_{EF} = (nds)_{EG},$$

infine, considerando che n è lo stesso (n_1 , quello che compete al punto E):

$$(ds)_{EF} \geq (ds)_{EG} \text{ o } (n_1 ds)_{EF} \geq (n_1 ds)_{EG}. \quad (17.3)$$

In tal modo abbiamo messo in relazione il valore del cammino ottico infinitesimo su EG e EF: in pratica abbiamo solo formalizzato il fatto che EG è minore di EF perché normale alle superfici, a parità di n . Ora mettiamo in relazione il cammino ottico su EG e su CD, ai quali compete un indice n diverso (quello che compete al punto C è n_2). Riapplicando le (16.6) e (16.7) alla curva chiusa CDGE, si ha:

$$(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{CD} + \underbrace{(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{DG}}_{=0} + (n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{GE} + \underbrace{(n\vec{s} \cdot d\vec{r})_{EC}}_{=0} = 0$$

$$(n_2\vec{s} \cdot d\vec{r})_{CD} = (n_1\vec{s} \cdot d\vec{r})_{EG}. \quad (17.4)$$

Mettendo insieme i risultati della (17.3) e (17.4):

$$(n_1 ds)_{EF} \geq (n_2 ds)_{CD},$$

a questo punto basta integrare il primo membro su tutta la curva γ' e il secondo su γ per trovare:

$$\int_{\gamma'} nds \geq \int_{\gamma} nds, \quad (17.5)$$

che esprime formalmente quanto si doveva dimostrare.

In realtà quella presentata non è una dimostrazione rigorosa, motivo per cui si è parlato di “giustificazione”. Una dimostrazione rigorosa dovrebbe fare uso del calcolo delle variazioni; solo in questo

modo si arriverebbe a dimostrare che il cammino ottico pertinente al raggio tra i due punti A e B in generale è un punto “critico”, quindi può essere un massimo, anche se nei casi usuali si ha sempre ad un minimo. Tale tipo di dimostrazione va oltre gli scopi della presente trattazione.

18. Derivazione delle leggi dell’ottica dal principio di Fermat

Il principio di Fermat può essere usato per ricavare le leggi dell’ottica geometrica in modo molto semplice. Si consideri infatti la fig.10, in cui OD (OD=d) è la traccia della superficie di separazione tra due mezzi: quello superiore è omogeneo con indice di rifrazione n_1 , quello inferiore è omogeneo con indice n_2 ; per quanto visto in precedenza il raggio ottico, in ciascuno dei due mezzi, è una retta; essa però ha in generale un’inclinazione differente nel passare da uno all’altro. Anche se i mezzi non fossero omogenei, la trattazione sarebbe ancora valida, a patto di considerare porzioni di spazio molto piccole, nell’intorno della superficie di separazione, in modo che al loro interno gli indici possano considerarsi costanti.

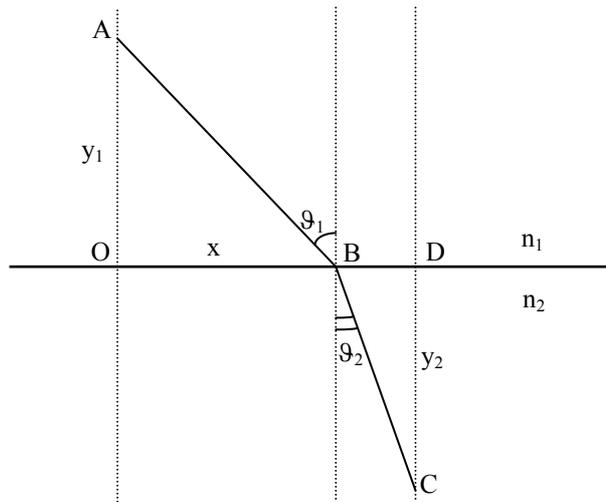


Figura 10: derivazione della legge di Snell

Nel nostro caso, applicare il principio di Fermat si riduce a calcolare il percorso geometrico seguito dal raggio, che origina nel punto A nel mezzo 1 e termina nel punto B nel mezzo 2, dopo aver incontrato la superficie di separazione nel punto B. Le rette verticali tratteggiate sono le normali alla superficie di separazione condotte per A, B e C. Viene definito un sistema di riferimento cartesiano con origine in O, asse x la retta cui appartiene OD e asse y la retta cui appartiene OA. Pertanto le coordinate dei tre punti notevoli del cammino ottico sono: A(0,y₁), B(x,0), C(d,y₂). L’ascissa di B è stata posta pari ad x perché è l’incognita del problema. Si cerca dapprima di esprimere il cammino ottico da A a B e da B a C, ottenendo:

$$\overline{AB} = \sqrt{y_1^2 + x^2} \quad \overline{BC} = \sqrt{y_2^2 + (d-x)^2} ,$$

poi di calcolare la derivata ed imporre che sia nulla per il principio di Fermat:

$$\frac{d}{dx} (n_1 \sqrt{y_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}) = 0$$

$$n_1 \frac{2x}{2\sqrt{y_1^2 + x^2}} + n_2 \frac{-2(d-x)}{2\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = n_2 \frac{(d-x)}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}} .$$

Dalla trigonometria sappiamo che: $\frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}} = \sin \vartheta_1$ e $\frac{(d-x)}{\sqrt{y_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \vartheta_2$, pertanto si trova:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 , \tag{18.1}$$

che è proprio la legge di Snell. In realtà il procedimento può essere usato anche per ricavare la legge della riflessione, a patto di dare la giusta interpretazione ai parametri: nel caso della riflessione il punto C si trova nel semispazio superiore e la sua ordinata y_2 va intesa come positiva, ma la cosa importante è che, essendo sia AB che BC nello stesso mezzo, l'indice di rifrazione è sempre n_1 , pertanto:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_1 \sin \vartheta_2 \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_2, \quad (18.2)$$

che è la legge della riflessione.

Vale la pena di ricordare come la costanza degli indici di rifrazione debba valere localmente alla superficie di separazione, cosa che si può ritenere valida nei casi in cui si analizzano i normali strumenti ottici: l'aria ed il vetro, alle scale delle distanze tipiche degli strumenti, hanno i rispettivi indici di rifrazione praticamente costanti (anzi, si cerca di fare in modo che le lenti siano quanto più omogenee possibile). Su grandi scale, quali quelle che è possibile incontrare quando si consideri un raggio di luce che attraversa l'atmosfera (quindi per percorsi di decine o centinaia di chilometri), l'aria non si può più considerare omogenea ed i raggi tendono a curvarsi (con il centro di curvatura dalla parte delle zone con n maggiore).

19. Limiti di validità dell'ottica geometrica

Prima di discutere i risultati raggiunti e comprenderne i limiti va sottolineato un fatto importante. A partire dall'introduzione degli esponenziali complessi si è supposto che l'onda elettromagnetica fosse monocromatica, tuttavia questa circostanza non si verifica mai in pratica, essendo presenti sempre onde composte da molte componenti spettrali distinte. Per fortuna si può dimostrare che nella grande maggioranza dei casi pratici (in cui le componenti spettrali sono scorrelate tra loro) l'energia portata complessivamente dalle onde è data dalla somma di quella portata dalle singole componenti, che quindi si comportano ciascuna in modo indipendente dalle altre.

Arrivati a questo punto possiamo guardare ai risultati nel loro complesso e considerare che essi appaiono singolari: nell'incontrare una superficie di separazione tra due mezzi omogenei i raggi ottici sembrano obbedire alle stesse leggi valide per le onde piane. Ciò può apparire paradossale, dato che le due situazioni sono molto diverse tra di loro: l'onda piana è per sua definizione un oggetto di dimensioni indefinite, i cui fronti d'onda quindi si estendono in linea di principio fino all'infinito; al contrario un raggio ottico è un oggetto di dimensioni trasversali infinitesime, infatti è stato equiparato ad un tubo di flusso infinitamente sottile, dedotto nella condizione in cui la lunghezza d'onda tende a zero.

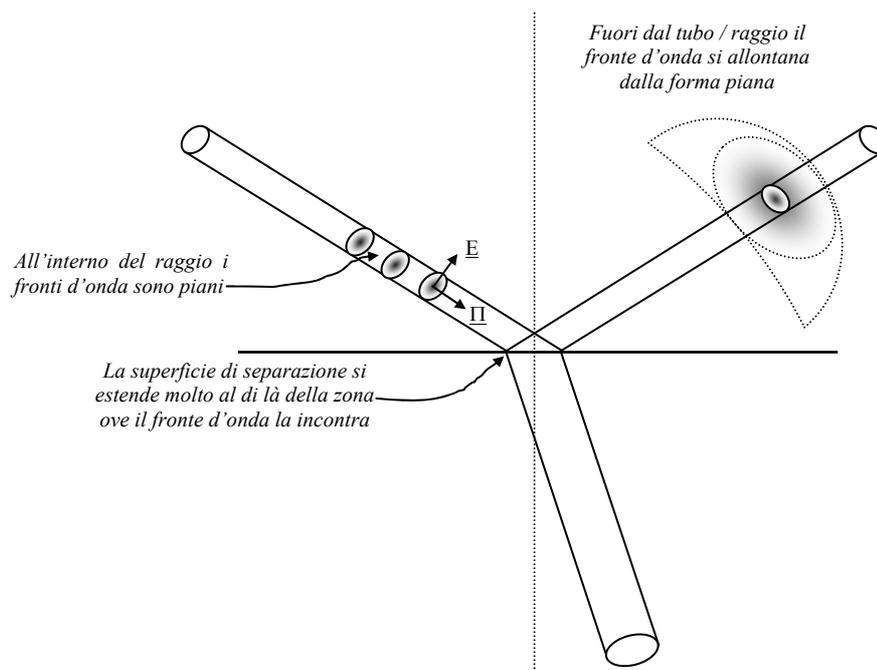


Figura 11: visualizzazione delle onde piane nei raggi ottici

In realtà le due situazioni non sono incompatibili, basta dare la giusta interpretazione a quanto ricavato. Perché le leggi della riflessione e rifrazione dedotte per le onde piane siano valide è necessario che i mezzi siano omogenei ed isotropi, mentre non è necessario che il fronte d'onda sia piano fino all'infinito, ma solo che esso lo sia in un intorno di ogni punto, in particolare quando si attraversa una superficie di separazione tra due mezzi: è la superficie di separazione tra i due mezzi che si deve estendere a distanze molto superiori a quelle tipiche dello spessore del raggio ottico associato all'onda in esame (che sono comparabili con λ) (fig.11). È necessario inoltre che noi non siamo interessati a determinare i valori dei campi elettromagnetici con la precisione dell'ordine dello spessore del raggio ottico. Ebbene, ciò è proprio quello che succede normalmente quando si studia l'ottica geometrica: se infatti volessimo indagare su scale dell'ordine di λ , l'approssimazione non sarebbe più valida e sparirebbero le semplificazioni che ne conseguono. Ad esempio, quello che appare come un confine netto tra luce ed ombra si rivelerebbe differente in virtù dei fenomeni ondulatori di diffrazione, con il passaggio dalla zona illuminata a quella in ombra che avviene per alternanze di zone chiare e scure.

Anche situazioni in cui non esistono onde piane possono essere trattate usando il concetto di raggio. Come esempio si prenda una sorgente puntiforme dalla quale originino onde sferiche; già ad una distanza breve dalla sorgente (dell'ordine dei centimetri nel caso delle onde luminose) il raggio di curvatura dell'onda sferica diventa molto superiore a λ e i fronti d'onda si possono considerare piani, purché si rimanga nell'intorno di ciascun punto. Dalla sorgente ad un generico punto è possibile tracciare un raggio – tubo di flusso – ottico, all'interno del quale il fronte d'onda si può considerare piano. Uscendo dal tubo, il fronte d'onda segue l'andamento sferico, ma questo è poco importante: il singolo raggio segue le leggi dell'ottica geometrica.

Quanto detto ha una giustificazione anche formale. Infatti, si riprendano le (14.8) - (14.11): quando i campi variano velocemente (cioè E_0 ed H_0 , variano molto spostandosi di quantità paragonabili a λ) i loro rotori e divergenze sono molto grandi, al limite tendono all'infinito, come il fattore k_0 che compare a denominatore; un discorso analogo vale per i parametri costitutivi ϵ e μ , dato che nelle equazioni compare il loro gradiente. In pratica i secondi membri delle (14.8) - (14.11) non si possono considerare tendenti a zero, perché si giunge ad una forma indeterminata

Nei casi in cui l'approssimazione non porti a risultati accettabili, per risolvere il problema della determinazione dei campi la funzione iconale $S(x,y,z)$ non è più sufficiente e bisogna passare ad approssimazioni di ordine superiore, tali da descrivere le rapide variazioni dei campi nei punti critici (bordi, punti focali). Tali termini aggiunti tuttavia portano a notevoli complicazioni di calcolo. Nella maggior parte dei casi di interesse pratico la semplice approssimazione dell'ottica geometrica classica gode di un buon rapporto tra semplicità ed accuratezza dei risultati.

20. Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro era il consentire la comprensione di come sia possibile ricavare le leggi dell'ottica geometrica a partire dalle più generali equazioni di Maxwell, che descrivono il campo elettromagnetico nel caso più generale possibile. Andava compreso, inoltre, sotto quali condizioni l'approssimazione geometrica ha validità e quali sono i suoi limiti. Per arrivare al tema centrale, trattato nei paragrafi 15-18, si è reso necessario richiamare varie nozioni di elettromagnetismo, in particolare il comportamento delle onde piane, quello alla discontinuità tra due mezzi e fare uso degli esponenziali complessi per trattare onde sinusoidali monocromatiche.

La trattazione qui presentata (che è poi quella delineata in [Born e Wolf 1959]) non è l'unica possibile; ad esempio [Bianchi, Sciacca e Settimi 2009] ne riporta sinteticamente un'altra, che si basa sul trattamento dell'equazione delle onde. Si è seguita la strada di [Born e Wolf 1959] perché ha validità più generale e consente di seguire tutti i passaggi con maggiore facilità.

Il filone di studio delle applicazioni dell'ottica geometrica del quale si è accennato nell'introduzione ha già prodotto alcuni risultati, relativi allo studio della propagazione (“*ray tracing*”) nel caso di un'atmosfera assimilata ad un mezzo non conduttivo, per il quale è sufficiente considerare una funzione iconale reale, come quella introdotta in questo lavoro. Rispetto a tali lavori, il presente può essere considerato un'utile premessa concettuale. Sono possibili approfondimenti, il più promettente dei quali dovrebbe consentire di estendere i risultati al caso di mezzo conduttivo (che porterebbe ad una funzione iconale complessa); infatti la propagazione delle onde radio nella ionosfera non si può assimilare a quella in

un mezzo non conduttivo, pertanto i risultati ottenuti in quest'ultima ipotesi costituiscono solo una prima approssimazione.

Bibliografia

Bianchi C. e Bianchi S. (2009). Problema generale del Ray Tracing nella propagazione ionosferica – Rapporto Tecnico INGV n°104.

Bianchi S., Sciacca U. e Settini A. (2009). Teoria della propagazione radio nei mezzi disomogenei (metodo dell'iconale) - Quaderno di Geofisica n°75.

Born M. e Wolf E. (1959). Principles of Optics – Pergamon Press, London.

Persico E. (1932). Ottica – Vallardi, Milano.

Sette D. (1967). Lezioni di Fisica vol.III – Elettromagnetismo. Edizioni Libreria Veschi, Roma.

Sette D. (1969). Appunti di Fisica II – Ottica. Edizioni Libreria Veschi, Roma.

Coordinamento editoriale e impaginazione

Centro Editoriale Nazionale | INGV

Progetto grafico e redazionale

Laboratorio Grafica e Immagini | INGV Roma

© 2010 INGV Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

Via di Vigna Murata, 605

00143 Roma

Tel. +39 06518601 Fax +39 065041181

<http://www.ingv.it>



Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia