

Rapporti tecnici

INGV

**Problema generale del ray-tracing
nella propagazione ionosferica -
formulazione della “ray theory” e
metodo del ray tracing**

104



Direttore

Enzo Boschi

Editorial Board

Raffaele Azzaro (CT)

Sara Barsotti (PI)

Mario Castellano (NA)

Viviana Castelli (BO)

Anna Grazia Chiodetti (AC)

Rosa Anna Corsaro (CT)

Luigi Cucci (RM1)

Mauro Di Vito (NA)

Marcello Liotta (PA)

Lucia Margheriti (CNT)

Simona Masina (BO)

Nicola Pagliuca (RM1)

Salvatore Stramondo (CNT)

Andrea Tertulliani - coordinatore (RM1)

Aldo Winkler (RM2)

Gaetano Zonno (MI)

Segreteria di Redazione

Francesca Di Stefano - coordinatore

Tel. +39 06 51860068

Fax +39 06 36915617

Rossella Celi

Tel. +39 06 51860055

Fax +39 06 36915617

redazionecen@ingv.it



Rapporti tecnici INGV

PROBLEMA GENERALE DEL RAY-TRACING NELLA PROPAGAZIONE IONOSFERICA - FORMULAZIONE DELLA “RAY THEORY” E METODO DEL RAY TRACING

Cesidio Bianchi¹, Silvio Bianchi²

¹INGV (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Sezione Roma 2)

²Università La Sapienza (Dipartimento di Fisica)

104

Indice

Introduzione	5
1. Velocità di fase e del raggio d'onda	6
2. Equazione della superficie dell'indice di rifrazione	8
3. Equazione della superficie del raggio d'onda	10
4. Equazione della iconale	12
5. Equazione canoniche del raggio d'onda	13
6. Applicazioni delle equazioni di Hamilton	15
7. Equazioni di Hamilton del raggio in coordinate sferiche	17
8. Teoria generale del raggio d'onda per mezzi varianti nel tempo	18
9. Principio di Fermat	20
Appendice	22
Bibliografia	26

Introduzione

Questo lavoro descrive la teoria del raggio d'onda indicata, nella letteratura internazionale, come “*ray theory*”. Questa teoria aiuta nella formulazione del metodo del ray-tracing che, tipicamente, viene affrontato con tecniche di analisi numerica. La teoria prende le mosse da alcuni lavori fondamentali sulla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali per mezzo di tecniche di approssimazione analitiche conosciute, come approssimazioni WKB (dagli autori Wentzel, Kramers, Brillouin che la proposero indipendentemente nel 1926). Tale approssimazione porta all'equazione della iconale, o integrale di fase, che viene sfruttata per scrivere le equazioni canoniche del raggio d'onda. La teoria che qui viene descritta conduce alla formulazione delle equazioni canoniche o Hamiltoniane relative al raggio d'onda. Si tratta quindi della propagazione del raggio in un mezzo continuo disomogeneo e anisotropo con gradienti non troppo elevati. Quando le discontinuità del mezzo sono elevate, il calcolo del percorso del raggio attraverso questa tecnica non è più valido e va applicata la legge di Snell alle superfici d'interfaccia delle discontinuità.

La formulazione della ray theory pertanto, porta a scrivere un numero di equazioni differenziali pari alle variabili da cui dipendono le 3 equazioni canoniche in coordinate generalizzate (q_1, q_2, q_3) e le 3 componenti del vettore d'onda assimilabili ai momenti (p_1, p_2, p_3) . Se consideriamo un mezzo non variante nel tempo, sei equazioni sono sufficienti. Viceversa, se ammettiamo che il mezzo sia tempo-variante, allora possiamo aggiungere altre due equazioni al gruppo delle sei poiché l'Hamiltoniana viene a dipendere anche dal tempo e dalla frequenza.

Nei primi paragrafi si seguirà un metodo abbastanza rigoroso ma poco formale per arrivare alla formulazione delle equazioni canoniche relative al raggio d'onda. Per fare ciò si introdurrà l'equazione della superficie dell'indice di rifrazione $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ che dipenderà sia dalle coordinate spaziali, sia dalle componenti dell'indice di rifrazione scritte in un apposito “spazio degli indici”. Quest'ultima equazione si sfrutterà per derivare le equazioni canoniche del raggio d'onda. Questo è il più semplice approccio matematico trovato in letteratura ma comporta qualche passaggio concettuale.

Si accennerà anche a un approccio molto formale (capitolo 8) che tiene conto dello sviluppo asintotico del raggio d'onda che nei vari gradi di approssimazione porta alla formulazione dell'Hamiltoniana, quindi alla iconale e alla determinazione del ray tracing. Tale applicazione trova una ragione pratica nella determinazione del percorso di una radio onda che si propaga in ionosfera.

Alla stessa stregua si può introdurre una superficie del raggio d'onda F e derivare da essa in combinazione con la grandezza G il principio di Fermat. Questo conferisce una certa generalità alla formulazione della *ray theory*. Infatti sulla base di questo principio solo un particolare percorso dove il raggio impiega un tempo minimo è quello effettivamente seguito dall'onda (*ray-path*), mentre in tutti gli altri possibili percorsi il raggio non si propaga.

1. Velocità di fase e del raggio d'onda

Nella tecnica del ray tracing si prende in considerazione la velocità del raggio d'onda v_r , cioè la velocità con cui si propaga l'energia di un'onda monocromatica. Questa posizione non si applica a un pacchetto d'onda che si propaga con la velocità di gruppo. Tale velocità è sempre inferiore a c in quanto ciascuna delle componenti si propaga con la sua velocità. In un'onda che stabiliamo sia monocromatica, la velocità con cui si propaga l'energia è la velocità del raggio d'onda. In generale quando si affronta un problema di ray tracing quello che si vuole conoscere è il percorso che segue il raggio d'onda nel mezzo in cui esso si propaga. Se il mezzo è isotropo, il problema è semplice in quanto le due velocità di fase e del raggio hanno la medesima direzione. Diverso è il caso di propagazione in un mezzo anisotropo, dove la velocità di fase e del raggio d'onda hanno direzioni differenti. Se il mezzo è disomogeneo, l'onda subisce il fenomeno della rifrazione ma, a livello del fronte d'onda, sia la velocità di fase che la velocità di gruppo hanno la stessa direzione.

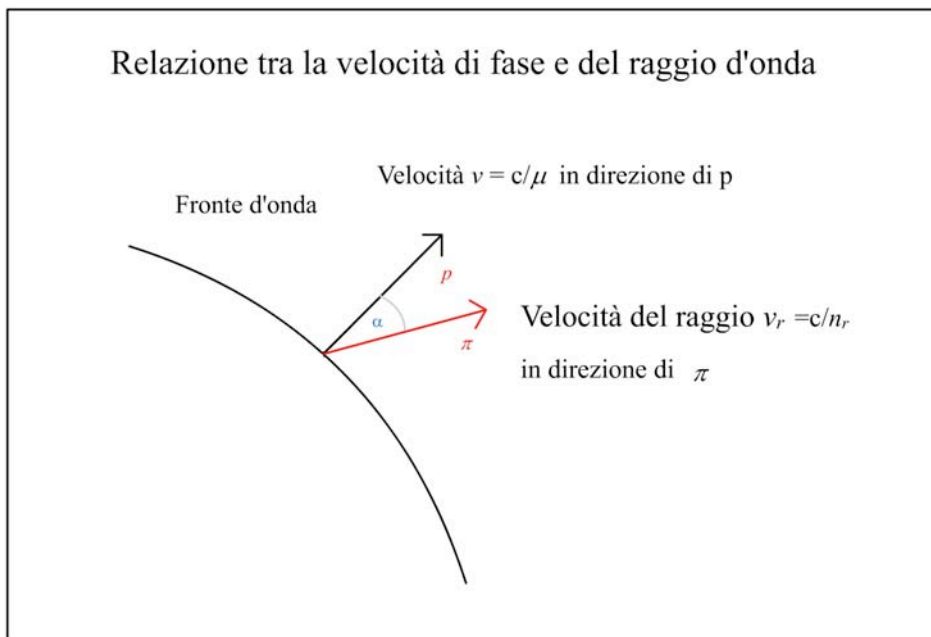


Figura 1.1 La normale al fronte d'onda è nella direzione di propagazione della velocità di fase p . In un mezzo anisotropo essa forma un angolo α con la velocità del raggio lungo π .

La velocità di fase rispetto alla velocità del raggio, nei mezzi anisotropi, forma un angolo α in quanto la prima è sempre normale al fronte d'onda (superficie equifase) mentre la seconda coincide con la direzione della propagazione dell'energia (vedi figura 1.1).

Da un altro punto di vista, una radio onda che si propaga in un mezzo anisotropo, che parte dal punto T e arriva al punto R, segue il percorso lungo cui si propaga il raggio che ha il vettore velocità sempre tangente alla traiettoria seguita lungo TR. Il vettore velocità di fase, normale al fronte d'onda, forma un angolo α che dipende dall'indice di rifrazione di fase e di gruppo sul punto x,y,z (vedi figura 1.2).

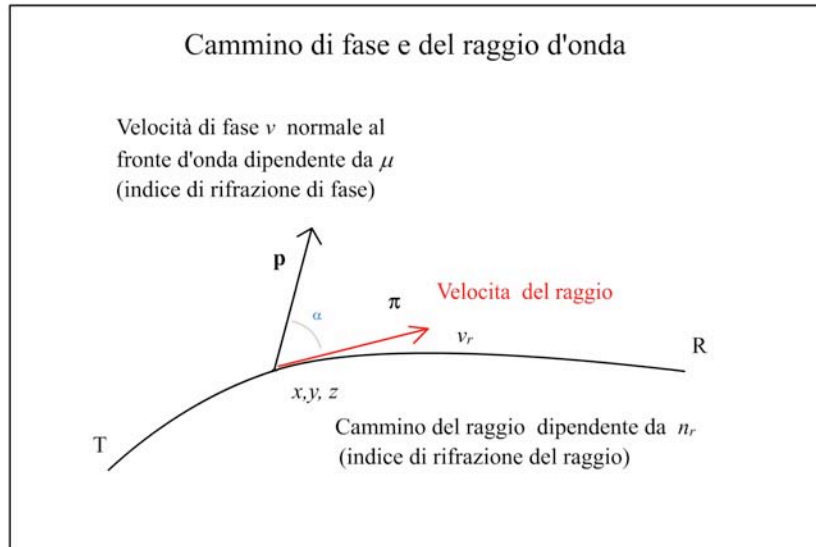


Figura 1.2 Il vettore velocità del raggio v_r è sempre tangente al percorso seguito dall'onda lungo la linea TR. Il vettore velocità di fase forma un angolo α rispetto alla direzione di propagazione della velocità v_r .

In un mezzo anisotropo nei punti x, y, z del *ray-path* le relazioni tra le velocità di raggio e di fase e gli indici di rifrazione corrispondenti, sono legati tra di loro attraverso l'angolo α (Fowles 1989) come nelle seguenti:

$$v = v_r \cos \alpha \quad (1.1)$$

$$n_r = \mu \cos \alpha \quad (1.2)$$

La derivazione delle (1.1) e (1.2) più intuitiva si può trovare nei testi di radio propagazione ionosferica (Davies 1967). Una derivazione più semplice è data nella p. 296 (Kelso 1964). Il vettore di poynting S (energia che fluisce nell'unità di superficie nell'unità di tempo) può essere scritto:

$$S = w v_r \quad (1.3)$$

dove w indica l'energia per unità di volume e pertanto risulta che $v_r = S/w$. Ora sapendo che $v = c/\mu$ si può scrivere la seguente:

$$v = \frac{S \cdot \mathbf{p}}{w} \quad (1.4)$$

dove il vettore di poynting S è proiettato in direzione di \mathbf{p} . In virtù della (1.3) avremo quanto segue:

$$v = \frac{(S \cdot \mathbf{p}) v_r}{S} = (\hat{\partial} \cdot \mathbf{p}) v_r = v_r \cos \alpha \quad (1.5)$$

essendo $\hat{\partial}$ e \mathbf{p} vettori unitari. La (1.2), a questo punto è immediata, se si pensa che $v = c/\mu$ e $v_r = c/n_r$. La velocità di propagazione dell'energia (raggio d'onda) è sempre maggiore della velocità di fase, a meno che α non sia nullo, poiché in tal caso esse sarebbero uguali.

2. Equazione della superficie dell'indice di rifrazione

In un mezzo non omogeneo e isotropo dove l'indice di rifrazione che caratterizza il mezzo stesso non vari molto in relazione alla lunghezza d'onda si considera uno "spazio dell'indice di rifrazione". Tale spazio è privo di dimensioni geometriche e in esso si possono definire gli assi coordinati p_x, p_y, p_z , paralleli a quello dello spazio ordinario descritto dagli assi coordinati x, y, z . Consideriamo un fronte d'onda nel punto x, y, z , come in figura 2.1. La normale al fronte d'onda, cioè la direzione di propagazione della fase, è diversa dalla direzione del raggio, che è la direzione di propagazione dell'energia. Ora dall'origine si traccia un vettore di modulo $\mu = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$ parallelo alla normale d'onda dove μ è il valore dell'indice di rifrazione di fase nel punto x, y, z .

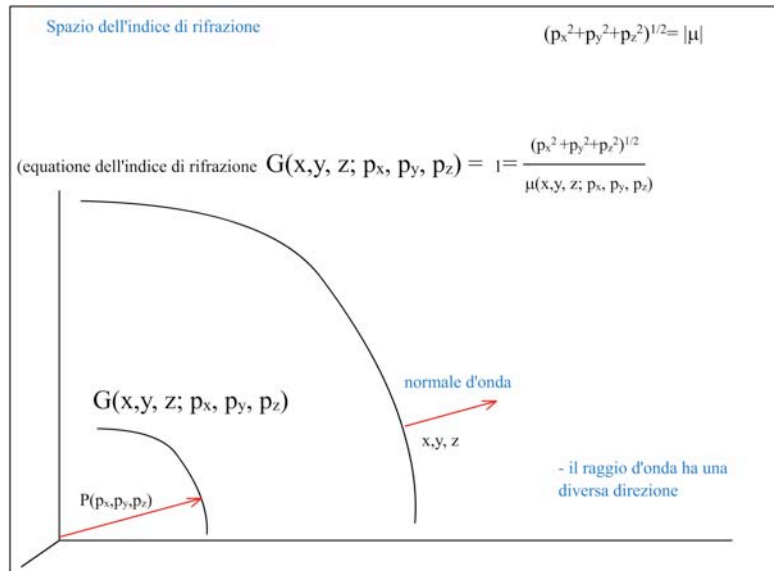


Figura 2.1 Superficie dell'indice di rifrazione.

In questo spazio i coseni di tale vettore sono:

$$p_x / (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}, \quad p_y / (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}, \quad p_z / (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

Spostandoci sulla superficie del fronte d'onda, il vettore \mathbf{p} traccerà una superficie che chiameremo superficie dell'indice di rifrazione G che ovviamente dipende da x, y, z, p_x, p_y, p_z , dove le componenti p_x, p_y, p_z si presentano solo in combinazione tra esse. Possiamo pertanto scrivere (Budden 1961):

$$G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}{\mu(x, y, z, p_x, p_y, p_z)} = 1 \quad (2.2)$$

Tale superficie, similmente all'equazione della sfera con centro l'origine, può essere scritta secondo la (2.2) ed è il luogo dei punti p_x, p_y, p_z toccati dall'apice del vettore \mathbf{p} . Ora la direzione del raggio è normale alla superficie dell'indice di rifrazione con i coseni proporzionali a:

$$\frac{\partial G}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial G}{\partial p_y}, \quad \frac{\partial G}{\partial p_z} \quad (2.3)$$

Il punto x, y, z , dove il raggio intercetta il fronte d'onda si muove con velocità \mathbf{v}_r e si può rappresentare come:

$$\mathbf{v}_r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2.4)$$

Possiamo pertanto immaginare che ogni punto sulla superficie abbia velocità data dalla (2.4) e che queste componenti siano proporzionali alla (2.3). La costante di proporzionalità tra queste due si trova nella

seguinte maniera. Scegliamo l'asse x in maniera tale che p_y, p_z siano nulli così come le derivate parziali rispetto a $\frac{\partial}{\partial p_y}$ e $\frac{\partial}{\partial p_z}$. La derivata parziale di G rispetto a p_x cioè $\frac{\partial}{\partial p_x} p_x/\mu$ è:

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{p_x}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \quad (2.5)$$

in quanto anche la derivata $\frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{1}{\mu} \right) = 0$, poiché non vi è variazione di μ lungo la direzione scelta p_x stesso.

Indichiamo con \dot{x} è la componente della velocità del raggio nella direzione della normale d'onda, la quale è c/μ . Quindi, in base alla 2.5 avremo

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = \frac{1}{c} \dot{x} \quad (2.6)$$

Pertanto la costante di proporzionalità cercata è $1/c$ e, generalizzando sulle altre derivate parziali avremo:

$$\dot{x} = c \frac{\partial G}{\partial p_x}, \dot{y} = c \frac{\partial G}{\partial p_y}, \dot{z} = c \frac{\partial G}{\partial p_z} \quad (2.7)$$

Le relazioni (2.7) valgono anche in caso di mezzo anisotropo una volta scelto il particolare indice di rifrazione (ordinario o straordinario).

3. Equazione della superficie del raggio

Alla stregua di quanto fatto per la superficie dell'indice di rifrazione, consideriamo uno "spazio del raggio d'onda". In esso possiamo definire gli assi coordinati $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ delle velocità presi paralleli a quello dello spazio ordinario indicato con gli assi coordinati x, y, z . Consideriamo un fronte d'onda nel punto x, y, z , come in figura 3.1 e seguendo il procedimento del punto precedente possiamo tracciare un vettore che parte dall'origine tale che ogni punto della superficie possa essere associato nello spazio dei raggi a un vettore di modulo:

$$v_r = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (3.1)$$

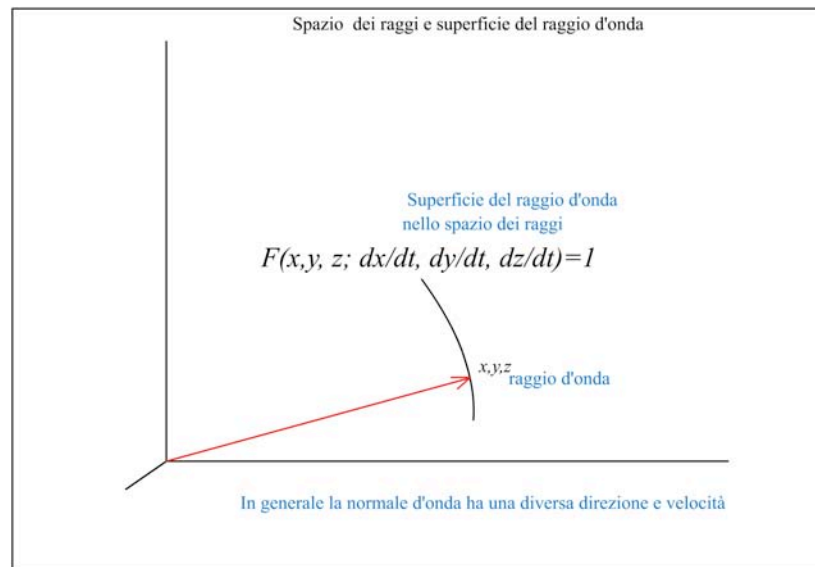


Figura 3.1 Spazio dei raggi d'onda.

Da qui si possono scrivere i coseni del raggi come:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad (3.2)$$

Se si prendono tutte le possibili direzioni del fronte d'onda, rimarrà definita una superficie detta "superficie del raggio" tale che:

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{c}{n_r}$$

cioè a dire

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{c} n_r(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1 \quad (3.3)$$

essendo la velocità $v_r = c/n_r$ e n_r l'indice di rifrazione del raggio. I coseni sono proporzionali a:

$$p_x, p_y, p_z \quad (3.4)$$

e anche proporzionali a:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \quad (3.5)$$

La costante di proporzionalità tra le (3.4) e (3.5) è uguale a c . Avremo pertanto che:

$$p_x = c \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, p_y = c \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, p_z = c \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \quad (3.6)$$

Relazioni quest'ultime che sono reciproche alle (2.6). Infatti si parla di superfici reciproche poiché scambiando p_x, p_y, p_z con le derivate parziali delle velocità $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ otteniamo o la (2.6), dove figura la funzione G , o la (3.6) dove figura la funzione F . La costante di proporzionalità tra p_x, p_y, p_z e le quantità nella (3.5) si trova nella seguente maniera. Scegliamo l'asse x tale che \dot{y} e \dot{z} siano nulli, tali che le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}$ delle componenti delle velocità lungo y e z non diano contributo. La costante di proporzionalità tra p_x, p_y, p_z e le quantità nella (3.5) si ottiene dalla funzione F che è uguale a $n_r \dot{x}/c$ e dalla sua derivata rispetto a $\frac{\partial}{\partial \dot{x}}$ che è:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{n_r}{c} = \frac{p_x}{c} \quad (3.7)$$

Dove n_r viene messo in relazione a p_x ricordando la precedente costruzione della superficie G . Pertanto la costante di proporzionalità è $1/c$. Questa relazione potrà essere sfruttata per formulare il principio di Fermat quando essa è combinata con la relazione della superficie dell'indice di rifrazione.

4. Equazione della iconale

Prendiamo in considerazione una soluzione dell'equazione di Maxwell $E = E_0 e^{-jk \cdot r}$ per un'onda che si propaga lungo r , scelta in direzione della normale d'onda e avente vettore di propagazione $k_0 = 2\pi/\lambda$. In una nuova terna di coordinate x, y, z , tale equazione si può scrivere $E = E_0 e^{-jk_0(xp_x + yp_y + zp_z)}$, dove p_x, p_y, p_z sono proporzionali ai coseni della normale d'onda rispetto ai nuovi assi e $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \mu^2$. Queste quantità p_x, p_y, p_z giocano un ruolo importante in quanto tengono conto della direzione del raggio. Non ha importanza a questo punto assumere che il mezzo sia omogeneo ma è importante ipotizzare che nel mezzo l'indice di rifrazione vari lentamente. Poiché riteniamo vera questa ultima assunzione, possiamo applicare il concetto di memoria di fase (*phase memory*) e il cambiamento di fase può essere espresso come $kp_x \delta x$. Lungo una

distanza x tale cambiamento può essere espresso come $k \int_0^x p_x dx$. Più in generale il cambiamento della fase da un punto all'origine a un punto x, y, z , è dato da:

$$k \left(\int_0^x p_x dx + \int_0^y p_y dy + \int_0^z p_z dz \right) \quad (4.1)$$

Pertanto assumiamo che esista una funzione $E = E_0 e^{-jS}$ che è una soluzione delle equazioni di Maxwell per cui:

$$S(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = k \left(\int_0^x p_x dx + \int_0^y p_y dy + \int_0^z p_z dz \right) \quad (4.2)$$

In un mezzo omogeneo, p_x, p_y, p_z sono costanti e si possono portar fuori dall'integrale. La funzione S è chiamata iconale. Essa può essere pensata come la parte spaziale della fase di un'onda. È evidente anche che:

$$p_x = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial x}, p_y = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial y}, p_z = \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial z} \quad (4.3)$$

quindi

$$\mathbf{p} = \frac{1}{k} \text{grad} S \quad (4.4)$$

Dove \mathbf{p} è un vettore di componenti p_x, p_y, p_z . Essendo nullo il rotore di \mathbf{p} , dato che il rotore del gradiente è sempre nullo, si ha:

$$\frac{\partial p_z}{\partial y} = \frac{\partial p_y}{\partial z}, \frac{\partial p_x}{\partial z} = \frac{\partial p_z}{\partial x}, \frac{\partial p_y}{\partial x} = \frac{\partial p_x}{\partial y} \quad (4.5)$$

Tale relazione sarà sfruttata in seguito per ricavare le equazioni canoniche del raggio. Una formulazione più generale è data nel paragrafo 8.

5. Equazioni canoniche del raggio

Sia $P(x, y, z)$ il punto in cui il raggio intercetta il fronte d'onda (per esempio le coordinate di una cresta dell'onda mentre essa viaggia lungo il raggio). Ad ogni punto di coordinate x, y, z di questa superficie corrisponde un punto p_x, p_y, p_z , sulla superficie dell'indice di rifrazione G la cui equazione, già ricavata, sarà per semplicità riscritta come nella seguente:

$$G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = I \quad (5.1)$$

che ha validità generale ed essa deve essere soddisfatta per ogni punto p_x, p_y, p_z .

Ora si considerano soltanto le variazioni dell'indice lungo x e derivando direttamente rispetto a x la (5.1) avremo $\frac{dG}{dx} = 0$, che per un raggio è:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

poiché p_x, p_y, p_z dipendono da x .

Quindi in base alle (2.7) e alle (4.5) avremo:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial p_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial p_x}{\partial z} \dot{z} \right) = 0 \quad (5.3)$$

e pertanto dato che p_x ha derivata nulla rispetto a y e z avremo:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{dp_x}{dt} \quad (5.4)$$

dove, $\frac{d}{dt}$ si applica al punto mobile x, y, z sulla superficie G . Si può pertanto scrivere:

$$\frac{dp_x}{dt} = \dot{p}_x \quad (5.5)$$

Generalizzando si ha:

$$-c \frac{\partial G}{\partial x} = \dot{p}_x, \quad -c \frac{\partial G}{\partial y} = \dot{p}_y, \quad -c \frac{\partial G}{\partial z} = \dot{p}_z \quad (5.6)$$

Queste equazioni sono molto importanti in questo contesto in quanto assumono una forma familiare e sono chiamate equazioni canoniche per un raggio. Esse insieme alle (2.7) acquisiscono una simmetria formale somiglianti alle equazioni di Hamilton, se si sostituisce H a G . Le equazioni di Hamilton, così come scaturiscono dalla meccanica classica che riportiamo di seguito, si possono confrontare con le (2.7) e (5.6):

$$\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad (5.8)$$

Nelle precedenti (5.7) e (5.8), q_i e p_i sono rispettivamente le coordinate generalizzate e i momenti generalizzati. Per tale ragione quando trattiamo le (2.7) e (5.6) si parla di equazioni di Hamilton anche se la derivazione come abbiamo visto è diversa da quella di Hamilton della meccanica classica.

Per le nostre applicazioni possiamo conferire maggiore generalità a queste equazioni e includere i casi dei mezzi tempo-varianti per i quali, data la dispersività intrinseca del plasma ionosferico, tale equazione viene a dipendere anche dalla frequenza. Ora far dipendere l'equazione di Hamilton oltre che da $q_i(t)$ e $p_i(t)$ anche esplicitamente dal tempo t e dalla frequenza ω non introduce altre difficoltà formali ma solo complicazioni di calcolo. Tale dipendenza in coordinate cartesiane e vettori d'onda k si può scrivere:

$$H(t, x, y, z, k_x, k_y, k_z, \omega) \quad (5.9)$$

Questa equazione è detta super-Hamiltoniana in quanto è possibile estrarre anche lo spostamento Doppler dovuto alla variazione nel tempo dell'indice di rifrazione. Rispetto alla funzione G , la funzione H differisce per il fatto che alle componenti dell'indice di rifrazione sono state sostituite le componenti del vettore k per mezzo della formula:

$$\frac{\omega}{c} n = k$$

con $n=(\mu+j\chi)$, indice di rifrazione complesso. Cono tale posizione e in base alla (2.2) si può riscrivere la (5.9) come:

$$H(t, x, y, z, k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{c}{\omega} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{n(t, x, y, z, k_x, k_y, k_z, \omega)} = 1 \quad (5.10)$$

Le proprietà anisotrope del mezzo dipendono solo dalla parte reale dell'indice di rifrazione (Bianchi 1990), mentre la parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento delle onde da parte del mezzo. Poiché qui siamo interessati a un problema di ray tracing, per amore di semplicità, possiamo continuare la trattazione considerando per il momento solo la parte reale μ , tornando alle equazioni simili alla (2.2) (Jones and Stephenson 1975).

$$H(t, x, y, z, k_x, k_y, k_z, \omega) = \frac{c}{\omega} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{\mu(t, x, y, z, k_x, k_y, k_z, \omega)} = 1 \quad (5.11)$$

Jones (1975) ha usato numerose forme derivate della (5.11) in coordinate sferiche ma questo sarà oggetto di ulteriori approfondimenti.

6. Applicazioni delle equazioni di Hamilton

Anche se il mezzo è disomogeneo e anisotropo, purché la variazione dell'indice di rifrazione sia piccola comparata con la lunghezza d'onda λ , si applicano le seguenti:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial k_x} \quad (6.1a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial k_y} \quad (6.1b)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial k_z} \quad (6.1c)$$

$$\frac{dk_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.1d)$$

$$\frac{dk_y}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (6.1e)$$

$$\frac{dk_z}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (6.1f)$$

Il parametro τ è un parametro che varia monotonamente lungo il percorso dell'onda e si può prendere, ad esempio, $\tau=ct$. Simili equazioni vennero proposte da Haselgrove nel 1955. Abbiamo quindi, in virtù della approssimazione WKB, 6 equazioni differenziali disaccoppiate, la cui integrazione numerica fornisce il percorso dell'onda o ray tracing.

Si possono anche considerare mezzi isotropi o con particolari simmetrie come nel caso di un mezzo a stratificazione piana (fig.6.1) che costituisce un discreto modello della ionosfera. In questo caso le equazioni canoniche del raggio (5.6) e (2.7) possono trovare un impiego nel calcolo numerico del ray tracing. Esse costituiscono una sorta di generalizzazione della legge di Snell.

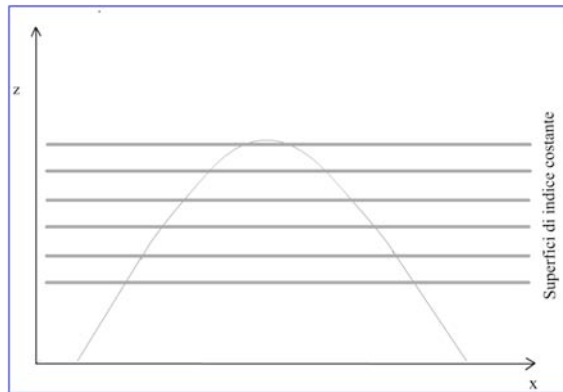


Figura 6.1 Mezzo a stratificazione piana.

Per ora ci limitiamo a utilizzare le (2.7) e le (5.6), relative alla funzione G , in un caso pratico in cui $\mu = \mu(z)$ e dove si esse si possono sfruttare.

In base alla figura 2.1 e alla formula (2.2) possiamo scrivere:

$$G(z, p_x, p_z) = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}}{\mu(z, p_x, p_z)} = 1 \quad (6.2)$$

È conveniente introdurre l'angolo θ tra la normale d'onda e la verticale

$$p_x = \mu \text{sen} \theta \quad (6.3 a)$$

$$p_z = \mu \text{cos} \theta \quad (6.3 b)$$

tale che si abbia

$$\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}} = \text{sen} \theta \quad (6.4 a)$$

$$\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_z^2}} = \cos\theta \quad (6.4 \text{ b})$$

Cioè, l'indice di rifrazione dipende solo da p_x e p_z oppure da z e θ attraverso le (6.3) e le (6.4). Pertanto possiamo scrivere che $\mu = \mu(z, \theta)$. Le derivate di G , riportate nella (2.2), rispetto a p_x e p_z sono date da:

$$\frac{\partial G}{\partial p_x} = \frac{p_x}{\mu(p_x^2 + p_z^2)^{1/2}} - \frac{(p_x^2 + p_z^2)^{1/2}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p_x} = \frac{\text{sen}\theta}{\mu} - \frac{\cos\theta}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_z} = \frac{p_z}{\mu(p_x^2 + p_z^2)^{1/2}} - \frac{(p_x^2 + p_z^2)^{1/2}}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p_z} = \frac{\cos\theta}{\mu} + \frac{\text{sen}\theta}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \quad (6.6)$$

Se ci si muove lungo il meridiano magnetico $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e con ciò risulta $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$. Inoltre, dato che $\mu = \mu(z, \theta)$ esso è costante lungo x avremo che $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, e per via della prima delle (5.6), p_x sarà una costante (si ritrova la legge di Snell). Quindi le (6.3) derivate rispetto a t saranno:

$$\frac{dp_x}{dt} = \text{sen}\theta \frac{d\mu}{dt} + \mu \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = \cos\theta \frac{d\mu}{dt} - \mu \text{sen}\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} (\mu \text{sen}\theta + \mu \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\theta}) = -\frac{\mu}{\text{sen}\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (6.8)$$

È possibile dimostrare l'ultimo passaggio della (6.8) ricavandosi $\frac{d\mu}{dt}$ dalla (6.7). Ora prendendo la (6.5) e sostituendola alla $x = c \frac{\partial G}{\partial p_x}$, la (6.6) alla $z = c \frac{\partial G}{\partial p_z}$ e la (6.8) alla $-c \frac{\partial G}{\partial z} = \dot{p}_z$ avremo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c \frac{\partial G}{\partial p_x} = c \left(\frac{\text{sen}\theta}{\mu} - \frac{\cos\theta}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \\ \frac{dz}{dt} &= c \frac{\partial G}{\partial p_z} = c \left(\frac{\cos\theta}{\mu} + \frac{\text{sen}\theta}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \\ \frac{dp_z}{dt} &= -c \frac{\partial G}{\partial z} = \left(-\frac{\mu}{\text{sen}\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

cioè a dire:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{c}{\mu^2} (\mu \text{sen}\theta - \cos\theta \frac{\partial \mu}{\partial \theta}) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{c}{\mu^2} (\mu \cos\theta + \text{sen}\theta \frac{\partial \mu}{\partial \theta}) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{c}{\mu^2} (-\text{sen}\theta \frac{\partial \mu}{\partial z}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Questo costituisce un sistema di equazioni che integrato e con opportune condizioni iniziali fornisce il percorso del raggio.

7. Equazioni di Hamilton del raggio in coordinate sferiche

Nei sistemi OTH per valutare esattamente la posizione del bersaglio, eseguire cioè l'operazione di "coordinate registration" (CR), dove sono coinvolte tipicamente distanze di migliaia di km, le coordinate cartesiane poco si prestano alla copertura di queste distanze. Inoltre la simmetria a guscio sferico della ionosfera e la curvatura terrestre, rendono più naturale l'utilizzo delle coordinate sferiche. Le equazioni (6.0a) e seguenti si possono scrivere in coordinate sferiche r, θ, φ . Il passaggio, non affatto difficile ma macchinoso, da una geometria cartesiana a una geometria sferica, è riportato nell'appendice.

$$\frac{\partial H}{\partial k_r} = \frac{dr}{d\tau} \quad (7.1a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial k_\theta} = \frac{d\theta}{d\tau} \quad (7.1b)$$

$$\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial H}{\partial k_\varphi} = \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (7.1c)$$

$$\frac{dk_r}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial r} + k_\theta \frac{d\theta}{d\tau} + k_\varphi \sin\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (7.1d)$$

$$\frac{dk_\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial H}{\partial \theta} - k_\theta \frac{dr}{d\tau} + k_\varphi r \cos\theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \quad (7.1e)$$

$$\frac{dk_\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r \sin\theta} \left(-\frac{\partial H}{\partial \varphi} - k_\varphi \sin\theta \frac{dr}{d\tau} - k_\theta r \cos\theta \frac{d\theta}{d\tau} \right) \quad (7.1f)$$

Ciò è stato ottenuto derivando le equazioni canoniche del raggio rispetto alle coordinate sferiche, con l'utilizzo dei coefficienti metrici l, r e $r \sin(\theta)$. In particolare le ultime 3 equazioni sono state ottenute proiettando il vettore $k(k_x, k_y, k_z)$, scritto in coordinate cartesiane sui versori i_r, i_θ, i_φ , e trasformato in un vettore di componenti k_r, k_θ, k_φ (vedi figura 7.1).

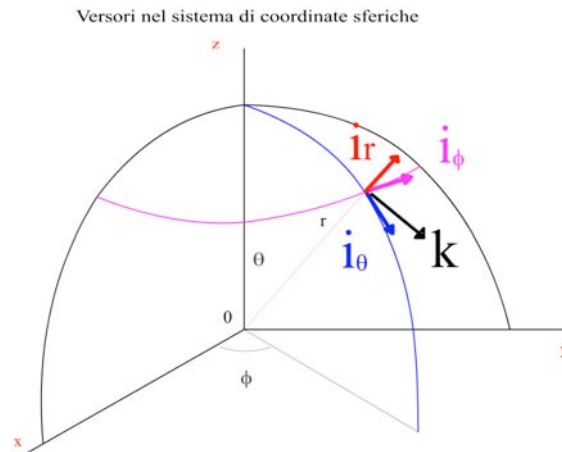


Figura 7.1 Proiezione del vettore k sulle direzioni dei versori i_r, i_θ, i_φ .

8. Teoria generale del raggio d'onda per mezzi varianti nel tempo

Il metodo della iconale complessa (Weinberg 1962) tratta la propagazione del raggio d'onda in un magneto-plasma con indice di rifrazione $n(x,y,z)$ per una fissata pulsazione ω . Secondo questa formulazione operando in coordinate cartesiane (non generalizzate) possiamo scrivere un gruppo di equazioni differenziali lineari omogenee generate da un operatore matriciale $M(t, \mathbf{r}, \frac{d}{dt}, \nabla)$ di dimensioni $m \times m$ che opera su un vettore $\Psi(t, \mathbf{r})$ avente m componenti secondo la seguente:

$$M(t, \mathbf{r}, \frac{d}{dt}, \nabla)\Psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (8.1)$$

M è una grandezza tensoriale che descrive le proprietà del mezzo che, per il momento, assumiamo dipendere debolmente dal tempo t (*time variant*) e dalle coordinate spaziali \mathbf{r} . Inoltre si assume che $\Psi(t, \mathbf{r})$ sia anch'essa una grandezza vettoriale che dipende sia dal tempo che dalle coordinate. Se tutta la dipendenza spaziale e temporale di $\Psi(t, \mathbf{r})$ viene trasferita alla funzione $\Phi(t, \mathbf{r})$ secondo una funzione del tipo:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \sim \Psi_0 e^{jv\Phi(t, \mathbf{r})} \quad (8.2)$$

dove v ha solo il significato di un parametro. Il vettore $\Psi(t, \mathbf{r})$ di ampiezza Ψ_0 soddisfa le equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine con il termine di fase $\Phi(t, \mathbf{r})$ la cui dipendenza dal tempo-spazio è stata prima specificata. La funzione (8.2) sostituita nella (8.1) dà:

$$M(t, \mathbf{r}, jv \frac{d}{dt} \Phi, jv \nabla \Phi) \Psi_0 = 0 \quad (8.3)$$

Poiché in un mezzo omogeneo $v\Phi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ dove \mathbf{k} e ω sono costanti, analogamente possiamo assumere che:

$$\bar{\omega} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (8.4); \quad \bar{\mathbf{k}} = \nabla \Phi \quad (8.5)$$

dove $\bar{\omega}$ e $\bar{\mathbf{k}}$ giocano un ruolo di quantità locali pesate con il parametro v (Felsen and Marcuvitz 1973). Nella equazione (8.3), dato che Ψ_0 non può essere nullo per evitare la soluzione non banale si deve annullare il determinante di M , ossia:

$$|M(t, \mathbf{r}, jv \frac{d}{dt} \Phi, jv \nabla \Phi)| = 0 = H(t, \mathbf{r}, \bar{\omega}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (8.6)$$

con le quantità fornite dalle equazioni (8.4) e (8.5) assunte rispettivamente come frequenza angolare locale e vettore d'onda locale. Si prendono quei valori $\bar{\omega}$ e $\bar{\mathbf{k}}$ che soddisfano l'equazione (8.6). Qui è stato introdotto il termine H che ci ricorda che siamo in presenza di una Hamiltoniana, e va rimarcato il fatto che \mathbf{k} è irrotazionale per la (8.5) e soddisfa la (8.6)

Se M è indipendente dal tempo si può assumere che Ψ sia una grandezza che va con $e^{-j\omega t}$ e che M dipenda da t solo attraverso ω oltre che dalle coordinate \mathbf{r} . L'approssimazione di ordine zero consiste nell'assumere che M dipenda debolmente dalle coordinate e che tutta la dipendenza spaziale di $\Psi(t, \mathbf{r})$ sia trasferita nell'esponente:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0 e^{jvS(\mathbf{r})} \quad (8.7)$$

$$M(\mathbf{r}, j\omega v, kv) \Psi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (8.8)$$

Ripetendo la procedura consolidata per esempio WKB con una approssimazione al più basso ordine di v ricaviamo:

$$\omega = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (8.9)$$

$$\mathbf{k} = \nabla S \quad (8.10)$$

L'equazione sopra è ancora l'equazione della iconale. La soluzione della (8.8) determina ω e \mathbf{k} tali per cui essi soddisfano in partenza l'equazione. In altre parole $M(t, \mathbf{r}, \omega, \mathbf{k})$ dà luogo a una relazione $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ che è in definitiva una relazione di dispersione. Questa si può considerare una costante durante la propagazione. Se essa soddisfa in partenza l'equazione, essa sarà sempre soddisfatta durante la propagazione. In altre parole si può considerare come l'Hamiltoniana che evidentemente è una costante lungo il percorso dell'onda. Essa dipende dall'equazione di dispersione del mezzo com'è deducibile anche dalla forma implicita dell'equazione. Ripetendo il ragionamento che ha condotto alla (8.6) si ottiene:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = 0 \quad (8.11)$$

Con queste si dimostra che è possibile formulare anche in termini molto generali il problema del ray tracing. Questo vuol dire determinare "l'evoluzione" di \mathbf{k} se lo facciamo dipendere da un parametro τ , in maniera che:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau) ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}(\tau) \quad (8.12)$$

tali che se le condizioni iniziali $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau_1) ; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}(\tau_1)$ soddisfano le seguenti:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{k}} ; \quad \frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.13)$$

questo varrà ancora per ogni τ . In pratica le equazioni (8.13) si possono integrare come le (6.1) per ottenere il percorso del raggio d'onda. Tale metodo risulta, in alcuni casi, particolarmente conveniente.

9. Principio di Fermat

Si prende ancora la (3.3) che per semplicità riscriviamo:

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{c} n_r(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1 \quad (9.1)$$

derivando direttamente rispetto a x avremo $\frac{dF}{dx} = 0$ e tenendo conto di quanto commentato nella (5.2), si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} = 0 \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(p_x \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + p_z \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} \right) \quad (9.3)$$

avendo sfruttato la relazione (3.6). Sommando a quest'ultima la (5.3) si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(x p_x + y p_y + z p_z \right) = 0 \quad (9.4)$$

essendo uguale a c la quantità dentro le parentesi tonde, per esame visivo dato che $c = v\mu$, è assimilabile a un prodotto scalare che, ovviamente, derivato rispetto a x dà zero.

Risultati simili si hanno derivando rispetto a y e z cioè $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0$. Partendo da queste ultime

relazioni e ricordando che $p_x = -c \frac{\partial G}{\partial x}$ e $p_x = c \frac{\partial F}{\partial x}$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{dp_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right)$$

Generalizzando, le coordinate le (9.5) assumono la forma del tipo $\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = 0$. Queste sono le equazioni differenziali di Eulero-Lagrange che sono la condizione necessaria affinché esista un raggio tale che:

$$\delta \int_A^B F dt = 0 \quad (9.6)$$

L'integrale tra i punti estremi A e B viene chiamato azione e, si dimostra che la variazione è nulla solo se F è una Lagrangiana. È evidente che tra i possibili cammini solo il percorso effettivo seguito dal raggio, a variazione nulla, richiede il minimo tempo. Nel nostro caso, i punti A e B si trovano agli estremi del *ray-path* s e lungo tale percorso, la superficie F viene intersecata sempre dal raggio nel generico punto x, y, z che risulta essere sempre normale ad essa lungo s . Quindi se s è la distanza (curvilinea in generale) percorsa dal raggio allora avremo:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (9.7)$$

Combinando la (3.3) cioè $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{c} n_r \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ con la (9.7) e inserendo nella (9.6) si ottiene la seguente:

$$\delta \int_A^B \mu_r ds = 0 \quad (9.8)$$

Dove riconosciamo il principio di Fermat. Riassumendo, questo principio ha validità solo lungo l'effettivo percorso del raggio, cioè lungo i ds quando il raggio interseca la superficie F che, a sua volta, è legata tramite le (9.6) e (9.8) all'indice di rifrazione n_r del raggio. Il principio di Fermat (9.8) pertanto assicura il minimo cammino ottico. Viceversa, tutti gli altri possibili percorsi non garantiscono che siano soddisfatte tutte le relazioni dalle (9.5) alle (9.8).

Appendice

In questa appendice si dimostrano le ultime 3 equazioni del sistema (7.1) per il passaggio dalle coordinate cartesiane a sferiche, dato che per le prime 3 equazioni sono sufficienti i coefficienti metrici per eseguire la trasformazione. Nel sistema a geometria sferica (figura A1) valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A } 1)$$

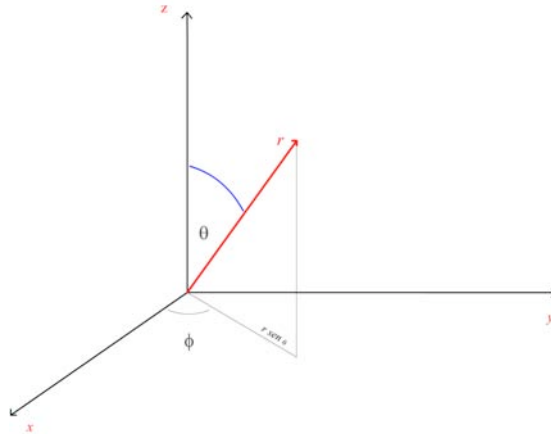


Figura A1 Trasformazione da geometria cartesiana a geometria sferica.

Le coordinate sferiche costituiscono un sistema di coordinate curvilinee ortogonali con i coefficienti metrici che assumono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= r \\ h_3 &= r \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A } 2)$$

Valgono anche le seguenti che servono a proiettare un vettore da un sistema cartesiano a un sistema polare e viceversa:

$$\mathbf{i}_r = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{i}_x + \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_y + \cos(\theta) \mathbf{i}_z \quad (\text{A } 3\text{a})$$

$$\mathbf{i}_\theta = \cos(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{i}_x + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_y - \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{i}_z \quad (\text{A } 3\text{b})$$

$$\mathbf{i}_\varphi = -\operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_x + \cos(\varphi) \mathbf{i}_y + 0 \mathbf{i}_z \quad (\text{A } 3\text{c})$$

$$\mathbf{i}_x = \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{i}_r + \cos(\theta) \cos(\varphi) \mathbf{i}_\theta - \operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_\varphi \quad (\text{A } 4\text{a})$$

$$\mathbf{i}_y = \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_r + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \mathbf{i}_\theta + \cos(\varphi) \mathbf{i}_\varphi \quad (\text{A } 4\text{b})$$

$$\mathbf{i}_z = \cos(\theta) \mathbf{i}_r - \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{i}_\theta + 0 \mathbf{i}_\varphi \quad (\text{A } 4\text{c})$$

Si riportano anche le derivate di (r, θ, φ) rispetto a x, y, z , poiché impiegate nella proiezione di k . Infine sono utili anche le seguenti che esprimono le derivate di x, y e z in coordinate sferiche r, θ e φ . La trasformazione delle coordinate cartesiane a coordinate sferiche è

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (\text{A } 5)$$

Le derivate parziali rispetto a x, y, z di una funzione $f = f(r, \theta, \varphi)$, ad esempio, si possono esprimere come:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (A6)$$

dove la funzione f è stata omissa e, nel caso delle A5 esse divengono:

$$= \text{sen}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (\cos\theta \cos\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\text{sen}\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (A7a)$$

$$= \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} (\cos\theta \text{sen}\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (A7b)$$

$$= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (A7c)$$

Nelle dimostrazioni in seguito descritte valgono anche le seguenti ottenute direttamente dalle (A7).

$$\dot{k}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(\text{sen}\theta \cos\varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos\theta \cos\varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (A8a)$$

$$\dot{k}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(\text{sen}\theta \text{sen}\varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos\theta \text{sen}\varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\cos\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (A8b)$$

$$\dot{k}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\cos\theta \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} \text{sen}\theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (A8c)$$

Qui di seguito si dimostrano le relazioni (7.1d), (7.1e) e (7.1f), che è poi lo scopo di questa appendice. Per determinare della (7.1d) ossia $\frac{dk_r}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial r} + k_\theta \frac{d\theta}{d\tau} + k_\varphi \text{sen}\theta \frac{d\varphi}{d\tau}$, poniamo per semplicità $\frac{dk_r}{d\tau} = \frac{dk_r}{dt}$. Si scrive poi per il vettore d'onda \mathbf{k}_r della relazione (A3a) cioè:

$$\mathbf{k}_r = \text{sen}\theta \cos\varphi \mathbf{k}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \mathbf{k}_y + \cos\theta \mathbf{k}_z$$

si deriva rispetto a t il vettore \mathbf{k}_r indicando con il punto le derivate rispetto al tempo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{k}}_r &= +\cos\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_x - \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_x + \text{sen}\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_y \\ &\quad \cos\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_y + \text{sen}\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_y + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_y \\ &\quad -\text{sen}\theta \dot{\mathbf{k}}_z + \cos\theta \dot{\mathbf{k}}_z\end{aligned}\quad (A9)$$

ora mettendo in evidenza $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ ecc. avremo:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} (+\cos\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_x + \cos\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_y - \text{sen}\theta \dot{\mathbf{k}}_z) \text{ dal confronto con le (A3b) risulta uguale a } \mathbf{k}_\theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} (-\text{sen}\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_x + \text{sen}\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_y) \text{ dal confronto con le (A3c) risulta uguale a } \text{sen}\theta \mathbf{k}_\varphi \frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

e, in ultimo, $\text{sen}\theta \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_y + \cos\theta \dot{\mathbf{k}}_z$ risultano uguali a $-\frac{\partial H}{\partial r}$, come si dimostra qui nel seguito. Infatti, basta sostituire le componenti $\dot{\mathbf{k}}_x, \dot{\mathbf{k}}_y, \dot{\mathbf{k}}_z$ date dalle (A.8) per avere:

$$\begin{aligned}\text{sen}\theta \cos\varphi \left[-(\text{sen}\theta \cos\varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos\theta \cos\varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] \\ \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \left[-(\text{sen}\theta \text{sen}\varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos\theta \text{sen}\varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\cos\varphi}{r \text{sen}\theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] \\ +\cos\theta \left[-\cos\theta \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} \text{sen}\theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right]\end{aligned}$$

Raggruppando i termini di $\frac{\partial H}{\partial r}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$ e $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$ avremo:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial r} (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) &= -\frac{\partial H}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta) &= 0 \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} (\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Resta così ricavata la (7.1d).

Per scrivere la (7.1e), ossia $\frac{dk_\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial H}{\partial \theta} - k_\theta \frac{dr}{d\tau} + k_\varphi r \cos \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \right)$, si ripete la stessa procedura dopo aver scritto k_θ in base alla (A3b):

$$k_\theta = \cos \theta \cos \varphi k_x + \cos \theta \sin \varphi k_y - \sin \theta k_z$$

Di nuovo derivando rispetto al tempo si ha:

$$\begin{aligned} \dot{k}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi k_x \frac{d\theta}{dt} - \cos \theta \sin \varphi k_x \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \cos \varphi \dot{k}_x \\ &\quad - \sin \theta \sin \varphi k_y \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \cos \varphi k_y \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \sin \varphi \dot{k}_y \\ &\quad - \cos \theta k_z \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \dot{k}_z \end{aligned} \quad (A10)$$

Raggruppando i termini simili si ottengono le seguenti relazioni:

$-\frac{d\theta}{dt} (\sin \theta \cos \varphi k_x + \sin \theta \sin \varphi k_y + \cos \theta k_z)$ dal confronto con le (A3a) risulta uguale a $-k_r \frac{d\theta}{dt}$
 $\frac{d\varphi}{dt} (-\cos \theta \sin \varphi k_x + \cos \theta \cos \varphi k_y)$ dal confronto con le (A3c) risulta uguale a $\cos \theta k_\varphi \frac{d\varphi}{dt}$
 $+\cos \theta \cos \varphi \dot{k}_x + \cos \theta \sin \varphi \dot{k}_y - \sin \theta \dot{k}_z$ che risulta uguale a $-\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$ come si dimostra qui nel seguito.

Infatti, basta sostituire le componenti \dot{k}_x , \dot{k}_y , \dot{k}_z date dalle (A.8) per avere:

$$\begin{aligned} &\cos \theta \cos \varphi \left[-(\sin \theta \cos \varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos \theta \cos \varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] \\ &\cos \theta \sin \varphi \left[-(\sin \theta \sin \varphi) \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r} (\cos \theta \sin \varphi) \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right] \\ &-\sin \theta \left[-\cos \theta \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

Raggruppando i termini di $\frac{\partial H}{\partial r}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}$ e $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$ avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial r} (\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta) &= 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} (\cos \theta \cos \phi \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \sin \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (A11)$$

Pertanto rimane da dimostrare che:

$$k_r \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} k_\theta \frac{dr}{dt} \quad (A12)$$

infatti tenendo conto della (5.11), riportata in coordinate sferiche, si può scrivere $\frac{1}{k_r} \frac{\partial H}{\partial k_r} = \frac{1}{k_\theta} \frac{\partial H}{\partial k_\theta}$, e delle relazioni (7.1a) e (7.1b) per confronto si ottiene la (A12).

Per la (7.1f) ossia, $\frac{dk_\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r\text{sen}\theta} \left(-\frac{\partial H}{\partial \varphi} - k_\varphi \text{sen}\theta \frac{dr}{d\tau} - k_\varphi r \cos\theta \frac{d\theta}{d\tau} \right)$, si scrive \mathbf{k}_φ in base alla (A3c).

$$\mathbf{k}_\varphi = -\text{sen}\varphi \mathbf{k}_x + \cos\varphi \mathbf{k}_y + 0 \mathbf{k}_z$$

derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_\varphi &= -\cos\varphi \mathbf{k}_x \frac{d\varphi}{dt} - \text{sen}\varphi \dot{\mathbf{k}}_x \\ &\quad -\text{sen}\varphi \mathbf{k}_y \frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi \dot{\mathbf{k}}_y \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

Qui con la stessa procedura descritta nella (A12) si può dimostrare che l'ultima colonna a destra è uguale a $-\frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$. Per le altre conviene sfruttare la relazione (A4a) moltiplicando entrambi i membri per $-\cos(\varphi)$,

$$-\cos\varphi \mathbf{k}_x = -\cos\varphi (\text{sen}\theta \cos\varphi \mathbf{k}_r + \cos\theta \cos\varphi \mathbf{k}_\theta - \text{sen}\theta \mathbf{k}_\varphi)$$

e la relazione (A4b) moltiplicando entrambi i membri per $-\text{sen}(\varphi)$

$$-\text{sen}\varphi \mathbf{k}_y = -\text{sen}\varphi (\text{sen}\theta \text{sen}\varphi \mathbf{k}_r + \cos\theta \text{sen}\varphi \mathbf{k}_\theta + \cos\theta \mathbf{k}_\varphi)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{k}_r (-\text{sen}\theta \cos^2\varphi - \text{sen}\theta \text{sen}^2\varphi) + \mathbf{k}_\theta (-\cos\theta \cos^2\varphi - \cos\theta \text{sen}^2\varphi) + \mathbf{k}_\varphi (\cos\varphi \text{sen}\theta - \text{sen}\varphi \cos\theta)] \frac{d\varphi}{dt} = \\ & [-\text{sen}\theta \mathbf{k}_r \quad -\cos\theta \mathbf{k}_\theta \quad +0\mathbf{k}_\varphi] \frac{d\varphi}{dt} = \\ & = -\text{sen}\theta \mathbf{k}_r \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \mathbf{k}_\theta \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Qui con la stessa procedura descritta nella (A12) si possono dimostrare le relazioni sotto riportate:

$$\text{sen}\theta \mathbf{k}_r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r\text{sen}\theta} k_\varphi \text{sen}\theta \frac{dr}{dt} \quad (\text{A14})$$

$$\cos\theta \mathbf{k}_\theta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r}{r\text{sen}\theta} k_\varphi \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{A15})$$

Con ciò restano dimostrate le ultime 3 equazioni del sistema (7.1).

Bibliografia

- Bianchi C., (1990). Note sull'interazione delle onde elettromagnetiche con il plasma ionosferico
Pubblicazione ING.
- Budden K.G., (1961). Radio wave in the ionosphere, Cambridge University Press.
- Budden K.G., (1985). The propagation of the radio wave, Cambridge University Press.
- Davies Kenneth, (1965). Ionospheric Radio Propagation, National Bureau of Standard Monograph 80.
- Felsen L.B. and Marcuvitz N., (1973). Radiation and scattering of waves. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Fowles Grant G., (1989). Introduction to modern optic, Dover Publications Inc., N.Y.
- Gorman D. Arthur, (1985). Dispersive wave and caustics, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 8 n.1 pp93-107.
- Gorman D. Arthur, (1986). Space-time caustics, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 3 n.9 pp. 531-540.
- Haeselgrove J., (1954). Ray theory and new method for ray tracing, The Physical society, London, report of the Physical Society Conference pp 355-364.
- Kelso J.M., (1964). Radio ray propagation in the ionosphere, McGraw Hill N.Y.
- Kelso J.M., (1968). Ray tracing in the ionosphere, Radio Science Vol. 3 N.1 pp. 1-11.
- Jones R.M. and Stephenson J.J., (1974). A versatile three-dimensional ray tracing computer program for radio waves in the ionosphere.
- Weinberg S., (1962). Eikonal Method in Magnetohydrodynamics, The Physical Review, 126 (6), pp. 1899-1909.

Coordinamento editoriale e impaginazione

Centro Editoriale Nazionale | INGV

Progetto grafico e redazionale

Laboratorio Grafica e Immagini | INGV Roma

© 2009 INGV Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia

Via di Vigna Murata, 605

00143 Roma

Tel. +39 06518601 Fax +39 065041181

<http://www.ingv.it>



Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia